

LEÇONS

SUR

LA VISCOSITÉ

DES LIQUIDES ET DES GAZ.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS
37262 Quai des Grands-Augustins, 55.

LEÇONS

SUR

LA VISCOSITÉ

DES LIQUIDES ET DES GAZ

PAR

Marcel BRILLOUIN,

PROFESSEUR AU COLLÈGE DE FRANCE.

PREMIÈRE PARTIE.

GÉNÉRALITÉS. — VISCOSITÉ DES LIQUIDES.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1907

PRÉFACE.

La viscosité des fluides est le plus simple de tous les phénomènes irréversibles; elle se manifeste au sein d'un milieu physiquement homogène et dont la température peut être uniforme, ce qui la distingue de la conductibilité thermique; elle ne met en jeu que des actions mécaniques, ce qui la distingue du dégagement de chaleur par le courant électrique. On peut donc l'étudier à titre d'exemple de phénomène irréversible, à un point de vue plus spécialement thermodynamique. On peut aussi, particulièrement quand il s'agit des gaz, prendre pour guide la théorie moléculaire.

En fait, les phénomènes de frottement ont joué un rôle fondamental dans le développement de la Thermodynamique; mais la réciproque n'est pas aussi juste. Dans les mouvements lents, les seuls qu'on sache analyser, ce sont les forces, petites du premier ordre comme les vitesses relatives, qui sont directement mesurables et importantes, tandis que le travail converti en chaleur, petit du second ordre, n'empêche pas les transformations d'être pratiquement isothermes; tant dans la théorie que dans la pratique, ce sont les données purement dynamiques, vitesses et forces, que fournit la première approximation, et à partir desquelles on estime le travail, et, s'il y a lieu, les variations de température.

De toute façon, il faut commencer par l'étude de la viscosité telle qu'elle est, et pour elle-même; c'est ce que j'avais fait dans mes Leçons de 1898-1899 et 1899-1900, comme suppléant de M. Mascart au Collège de France, qui, remaniées et mises au courant, forment la matière de ce Livre.

Dans ce premier Volume il n'est question que des liquides.

Comme toujours, c'est l'expérience qui fournit les notions fondamentales. Après les analyses un peu confuses de la Renaissance, Newton soupçonne, dans la résistance des fluides au mouvement, des influences diverses, qui ne sont clairement discernées que par Coulomb.

Après les Mémoires de Coulomb, l'application des principes de la Dynamique est possible; les grandeurs qui caractérisent cette propriété comme distincte de l'inertie du fluide sont bien définies. A température constante, les fondements de l'étude physique de la viscosité sont établis; on peut écrire les équations du mouvement d'un fluide visqueux.

Il importe d'en effectuer l'intégration exacte ou approchée dans le plus grand nombre de cas possible, soit pour les applications, soit pour la construction d'appareils qui permettent l'étude de diverses influences : température, pression, concentration des dissolutions, composition chimique des liquides purs.

Telle est la matière des différents Chapitres du Livre I.

Le Livre II débute par la description détaillée des mémorables expériences de Poiseuille, à la suite desquelles il est devenu certain que la proportionnalité de la résistance visqueuse à la vitesse de déformation est conforme à l'expérience dans un domaine très étendu. Viennent ensuite les expériences sur le mercure qui montrent que l'adhérence à la paroi est aussi complète pour les liquides qui ne mouillent pas que pour ceux qui mouillent. Après quoi un Chapitre est consacré aux expériences sur les liquides organiques purs et aux essais de relation entre la viscosité moléculaire et la constitution chimique; il se termine par les belles expériences de Warburg sur le gaz carbonique au point critique, et par quelques autres.

Enfin, dans un dernier Chapitre, on trouvera une description des expériences de Hagen, Reynolds et Couette sur le passage du régime lent ou de Poiseuille, au régime rapide ou hydraulique, et des circonstances qui influent sur la limite des deux régimes d'après O. Reynolds.

Le second Volume contiendra l'étude des gaz et des caractères généraux des théories moléculaires.

LIVRE III. — Gaz.

Chap. I. — Premières recherches sur la viscosité des gaz au moyen du pendule et des disques oscillants.
Chap. II. — Disques oscillants. — Maxwell. — Kundt et Warburg.
Chap. III. — Écoulement par un tube étroit à la température ambiante.
Chap. IV. — Écoulement par un tube étroit. — A, températures inférieures à 100°. — B, températures élevées. — C, vapeurs organiques. — D, très hautes températures.

LIVRE IV. — Théories moléculaires. — Conclusion.

Chap. I. — Premiers essais de théorie : Navier, etc.
Chap. II. — Gaz. — Théories dynamiques.
Chap. III. — Liquides. — Essai de théorie cinétique.
Chap. IV. — Conclusion. — Aperçu sur la viscosité des fluides en général.

J'espère que le second Volume suivra de près le premier.

Marcel BRILLOUIN.

LEÇONS

SUR

LA VISCOSITÉ

DES LIQUIDES ET DES GAZ.

LIVRE I.

GÉNÉRALITÉS.

CHAPITRE I.

PREMIÈRES RECHERCHES EXPÉRIMENTALES. NEWTON. — COULOMB. FONDEMENTS EXPÉRIMENTAUX DE LA THÉORIE.

I. — TRAVAUX ANTÉRIEURS A CEUX DE COULOMB.

1. La résistance de l'eau et de l'air avant Newton. — Avant Galilée, tous les savants de la Renaissance qui s'occupaient de balistique avaient remarqué la forme singulière de la trajectoire des projectiles, d'abord rectiligne, puis recourbée vers le bas pour devenir rapidement presque verticale; ils distinguaient ces trois parties, sans pressentir les trois causes : vitesse initiale, pesanteur, résistance de l'air, dont elles révèlent l'existence.

C'est Galilée qui comprit le premier que les lois de la chute des corps deviendraient simples si l'on pouvait éviter l'influence de l'air, dont l'étude ne devait venir qu'en second lieu. Vers la fin de son

Dialogue I (1638), l'un des interlocuteurs, Salviati (¹), parlant de la résistance de l'eau, ajoute : « l'air même, quoique très mobile, réduit la vitesse du corps qui tombe, même très lourd, comme nous pouvons nous en assurer par l'expérience suivante : du haut d'une tour très haute, tirons un coup d'arquebuse vers le bas; la balle pénétrera moins dans le sol que si nous déchargions l'arquebuse à 4 ou 6 brasses au-dessus du sol ; signe évident que la vitesse de la balle, lancée du haut de la tour, a constamment diminué dans sa descente à travers l'air... ».

L'expérience, que Galilée n'avait pas faite, a été exécutée par les *Académiciens del Cimento* (²), qui ont trouvé un résultat conforme aux prévisions de Galilée, en mesurant, au lieu de la pénétration de la balle dans le sol, le diamètre de l'empreinte laissée sur une plaque de tôle (³).

Dès 1650, Riccioli, étudiant la chute de sphères de substances différentes dans l'air d'une hauteur de 280 pieds, et aussi dans l'eau, avait reconnu que le ralentissement est d'autant plus marqué que le corps qui tombe a un moindre poids spécifique et que le milieu est plus dense.

Le premier énoncé d'une loi du mouvement retardé par la résistance de l'air a été donné par Mariotte à la fin de son *Traité de la percussion et du choc des corps* (3ᵉ édit., 1679). Après avoir établi, par des raisonnements acceptables, l'existence d'une vitesse limite proportionnelle à la racine carrée du poids du corps, en raison inverse du diamètre, pour des corps semblables tombant dans l'air (p. 99-107), Mariotte aborde le problème beaucoup plus difficile du mouvement varié (p. 107). Bien qu'il ait reconnu que le poids soutenu par un jet d'eau est proportionnel au carré de la vitesse du jet (2ᵉ Partie, Prop. IX, 1ʳᵉ conséq., p. 78) et employé cette loi pour la recherche de la vitesse limite, Mariotte suppose, sans donner aucune explication et presque sans s'en apercevoir, la résistance proportionnelle à la vitesse : « Suivant la doctrine de Galilée, la vitesse acquise à la fin de la deuxième seconde dans le vuide doit être double de celle qui est acquise à la fin de la première, etc. ; la résistance de l'air sera double à la fin de la deuxième seconde, mais elle ne sera que simple

---

(¹) *Œuvres de Galilée,* édit. 1718, t. II, p. 537. Florence.

(²) *Saggi*.... Chap. XII, 1657-1667.

(³) A rapprocher de l'emploi des crushers de cuivre ou de plomb dans les études modernes de balistique.

en son commencement et elle augmentera par degrés égaux » (p. 108) et il en déduit, par un raisonnement assez peu satisfaisant, un mode de calcul des espaces parcourus jusqu'à la fin de la $n^{\text{ième}}$ seconde, qui équivaut à l'emploi de la formule

$$z = g\frac{n^2}{2}\left[1 - a\left(1 + \frac{n-1}{2}\right)\right]$$

évidemment fausse, car elle donne une vitesse maximum, mais non une vitesse limite, et, en outre, elle fait jouer un rôle particulier à la première seconde.

Cette formule a été contrôlée par des expériences effectuées dans « le noïau vuide de l'escalier à vis de la cave de l'Observatoire de Paris », de la manière suivante (p. 113-116) : L'observateur tient entre le pouce et l'index la boule d'un pendule à $\frac{1}{2}$ seconde, et entre le même pouce et le médius la boule qui doit tomber; toutes deux sont abandonnées simultanément en écartant les doigts; on compte les battements du pendule jusqu'à ce qu'on entende le choc contre le pavé, et, comme la chute est de 160 pieds et demi, on retranche $\frac{1}{6}$ de seconde pour la propagation du son. Mariotte a employé des boules de plomb, de cire, de liège, de différents diamètres, et trouvé une concordance suffisante des expériences avec la loi supposée.

Dans toutes ces expériences la vitesse est grande, elle atteint près de 30^{m} par seconde à la fin de la chute pour le plomb; le résultat risque donc de ne pas s'appliquer au mouvement beaucoup plus lent des pendules, qui, eux aussi, subissent une résistance qui diminue l'amplitude de leurs oscillations, sans changer sensiblement la période, fort heureusement.

2. Newton. — Une quarantaine d'années plus tard, la question fut reprise par Newton, qui y porta toute la clarté dont son merveilleux génie a fourni tant d'exemples.

La Section VI des *Principes de Philosophie naturelle* (1) débute par l'étude théorique du mouvement du pendule simple dans le vide, et dans un milieu faiblement résistant, suivant des lois diverses; dans chaque cas, Newton calcule le changement de période et la perte d'amplitude (p. 272-284). Cela fait, il décrit ses expériences. Un pendule formé d'un fil de 10 pieds et demi de longueur, auquel est suspendue une sphère de bois d'environ 7 pouces de diamètre, oscille

(1) *Philosophiæ naturalis Principia mathematica* (édit. de 1685), Livre II.

devant une règle divisée. Partant d'une amplitude déterminée a_0, on compte le nombre d'oscillations n nécessaire pour que l'amplitude soit réduite à $\frac{7}{8}a_0$. Voici l'une des séries citées (p. 285) :

a_0.	n.	d'où	$a_1 - a_0$.
2 pouces	164		1 : 656 de pouce
4 »	121		1 : 242 »
8 »	69		1 : 69 »
16 »	35,5		4 : 71 »
32 »	18,5		8 : 37 »
64 »	9,7		24 : 29 »

Pour les grandes amplitudes initiales $a_1 - a_0$ est sensiblement proportionnel à a_0^2, mais aux petites amplitudes la perte $a_1 - a_0$ est plus grande qu'il ne résulterait de là. La théorie précédemment développée permet à Newton de conclure que la résistance est proportionnelle au carré de la vitesse quand la vitesse est grande, et de calculer complètement la loi de la résistance à toutes les vitesses. Voici les nombres que Newton tire de l'expérience citée plus haut :

$$\frac{\text{Résistance}}{\text{Poids de la boule}} = \frac{\frac{7}{11}0{,}0000916\,V + \frac{16}{23}0{,}0010847\,V^{\frac{3}{2}} + 0{,}0029558\,V^2}{\text{longueur du pendule}}.$$

Plusieurs autres expériences conduisent à des résultats analogues. En particulier, la boule de bois subit une résistance dont le terme en V^2 est $7\frac{1}{3}$ fois celui de la boule de plomb, tandis que le rapport des carrés des diamètres est $11\frac{13}{16}$; Newton, ayant été conduit par sa théorie à regarder la résistance due à l'inertie du fluide comme proportionnelle au carré des diamètres, admet que l'écart entre $7\frac{1}{3}$ et $11\frac{13}{16}$ provient de la résistance due au fil qui serait ainsi comparable au tiers de celle due à la boule de plomb, et il s'en assure en refaisant l'essai avec une très grosse boule de bois (19 pouces), de manière à réduire l'importance de la résistance du fil.

La théorie ayant indiqué que le terme en V^2 dans la résistance est proportionnel à la densité du fluide, Newton fait de nouvelles expériences, dans lesquelles la boule du pendule oscille dans une auge pleine d'eau; il trouve (p. 289) que la résistance éprouvée dans l'eau est $\frac{535}{1,2}$ fois celle due à l'air, et admet que, si le fil aussi avait été plongé dans l'eau, le rapport aurait été 800 ou 900, c'est-à-dire celui des densités de l'air et de l'eau, *à peu de chose près;* car, ajoute-t-il, « fluida tenaciora, pari densitate, procul dubio, magis resistant quam liquidiora, ut oleum, frigidum quam calidum, calidum quam aqua

pluvialis, aqua quam spiritus vini, etc. »; c'est seulement pour les liquides qui coulent bien, qui conservent longtemps leur mouvement, comme l'eau, l'air, l'esprit-de-vin, la térébenthine, l'huile rectifiée, le mercure, les métaux fondus, que la proportionnalité de la résistance à la densité est exacte (p. 291-292).

Dans ce passage, Newton caractérise clairement une propriété distincte de la densité, à laquelle, sans aucun doute, se rapportent les termes en V et $V^{\frac{3}{2}}$ dont il n'a justifié par aucune considération théorique l'introduction dans sa formule.

Dans ces expériences, peu exactes, car l'auge est trop étroite et seule la petite boule subit une résistance proportionnelle à V^2 aux grandes vitesses, cette résistance proportionnelle à la surface caractérise l'action d'un milieu extérieur à la boule; mais, si un milieu (l'éther du vide) pénétrait tous les corps, il exercerait une résistance différente sur un ballon vide et sur un ballon plein. Newton fait l'expérience, ne trouve pas de différence certaine et conclut que la résistance du vide est négligeable.

Dans la Section suivante (VII, p. 294), Newton étudie plus particulièrement la chute des corps; il établit d'abord, par des raisonnements insuffisants, une formule complète de la résistance due à l'inertie du fluide déplacé, et la loi de chute du corps si cette résistance agit seule. Et il spécifie (p. 318) que, si la résistance observée est supérieure à la résistance calculée, l'excès est la résistance due à *l'élasticité du fluide, à sa ténacité, ou au frottement de ses parties*. Il termine par la description détaillée et le calcul numérique d'expériences sur la chute dans l'eau, faites au laboratoire, et sur la chute à l'air libre, exécutées dans l'église Saint-Paul, de Londres, en juin 1710.

Dès 1699, Amontons avait montré par expérience que le frottement des solides est indépendant de la vitesse et de la surface de contact, et proportionnel à la pression. Daniel Bernoulli, reprenant en 1730 la discussion numérique des expériences de Newton sur les pendules, n'hésite pas à admettre que la résistance supplémentaire, à ajouter à celle qui provient de l'inertie du fluide, est constante « comme d'habitude (¹) », c'est-à-dire comme lui-même l'avait supposé dans la sixième Partie de sa *Dissertation sur le mouvement des solides dans les fluides* (²), sans en donner des raisons satisfaisantes; la résistance

(¹) *Commentaires de Saint-Pétersbourg*, t. V, p. 123.
(²) *Commentaires de Saint-Pétersbourg*, t. III, p. 221.

totale serait alors $AV^2 + B$. Mais comme cette formule représente mal les expériences de Newton, il paraît porté à suspecter la précision des expériences, plutôt que la légitimité de son propre aperçu hypothétique.

3. **S'Gravesande** (1). — Jusqu'ici la résistance due à l'inertie du fluide est prédominante; il n'en est déjà plus ainsi dans les expériences de S'Gravesande.

Pour traverser le fluide, le corps doit surmonter la cohésion, dit-il (Liber III, Pars IV : *De corporibus motis in fluidis*. Ch. XV : *De resistentia quam patiuntur corpora per fluida mota;* t. I, p. 527). C'est quelque chose d'analogue à la production de cavités dans l'argile, et des expériences ont appris à S'Gravesande que la résistance est proportionnelle au volume refoulé (p. 233). Cette résistance doit donc être proportionnelle à la vitesse. La propriété spécifique est bien dégagée de l'influence de l'inertie, proportionnelle au carré de la vitesse, variable avec la forme de la proue à égalité de section.

Ces expériences effectuées sous des vitesses relatives assez faibles, par une bonne méthode de pesées, sont bien représentées par la formule à deux termes $aV^2 + bV$, que S'Gravesande a tirée de ses considérations théoriques, comme on en peut juger par l'exemple suivant :

	Vitesses						
	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
Résistances observées.....	50	125	250	400	600	850	1100
» calculées.....	40	120	240	400	600	840	1120

Cette loi est appliquée dans le Chapitre suivant au mouvement des pendules et contrôlée par les pertes d'amplitude dans l'air et dans l'eau (2).

(1) Première édition, 1719; quatrième édition, 1748.

(2) On pourra voir : POGGENDORF, *Histoire de la Physique*. — MONTUCLA, *Histoire des Mathématiques*, t. II, p. 455-465; t. III, p. 667-678, 679-690, 737-742.

Les indications historiques de Coulomb (§ 2, Mém. 1801) sont fausses. Par suite d'une lecture trop rapide et incomplète des textes, il a confondu le terme constant de frottement, proposé par Bernoulli, avec les corrections de poussée du fluide, constantes aussi, de Newton et de S'Gravesande.

II. — EXPÉRIENCES DE COULOMB.

4. Premier Mémoire (1784) (¹). **Mesure de l'adhérence d'un liquide à un solide.** — Ce Mémoire célèbre est surtout consacré à l'étude de la torsion des fils fins en vue de la construction de dynamomètres très délicats. La mesure de l'adhérence n'y est traitée qu'à titre d'exemple, pour montrer la petitesse des forces que de pareils dynamomètres peuvent mesurer avec exactitude.

Le Mémoire est partagé en deux sections.

Dans la première, Coulomb démontre que le moment des forces de torsion est proportionnel à l'angle de torsion quand les amplitudes sont très faibles. Il applique cette théorie et les résultats de l'expérience à la construction d'une « Balance pour mesurer le frottement des fluides contre les solides » et annonce ses futures expériences sur les attractions et répulsions électriques ou magnétiques.

Dans la seconde section, Coulomb cherche « par l'expérience comment la force élastique de torsion est modifiée dans les grandes oscillations » et annonce qu'il se servira des résultats obtenus « pour déterminer les lois de la cohérence et de l'élasticité des métaux et de tous les corps solides ».

Comme on voit, l'étude de l'adhérence n'occupe qu'une petite place dans ce Mémoire. Et, si Coulomb choisit cet exemple pour illustrer la théorie de la torsion, c'est que la quantité qu'il se proposait de mesurer est extrêmement petite et que sa mesure précise échappe à toute autre méthode.

Précisons ce que Coulomb entend par l'adhérence du liquide au solide.

Quand un corps se meut dans un fluide, trois causes interviennent pour résister au mouvement :

1° L'entraînement du fluide par le corps en mouvement, le fluide résiste par l'effet de son *inertie*.

2° L'*adhérence* du liquide au solide mobile, c'est-à-dire le frottement du liquide contre le solide ;

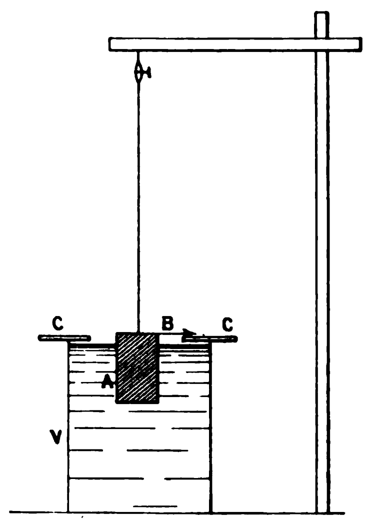
3° La *viscosité* ou *frottement interne* du fluide, ce que Coulomb appelait la *cohérence* du fluide, c'est-à-dire l'adhérence des particules fluides entre elles.

(¹) *Mémoires relatifs à la Physique*, publiés par la Société française de Physique, t. I, p. 86. — *Histoire de l'Académie*, 1784, p. 251-255.

La première et la troisième cause dépendent de la vitesse, la seconde paraît en être indépendante et se traduit par le terme constant d de la formule de Newton dans l'expression de la résistance. Si donc, la vitesse tend vers zéro, l'adhérence subsiste à peu près seule; mais la constante d, qui comprend aussi les frottements solides de l'appareil de mesure, est si faible, avec le dispositif de Coulomb, que l'adhérence ne devient appréciable qu'aux très petites vitesses.

L'appareil établi par Coulomb, pour la mesure de l'adhérence, est représenté dans la figure 1. Il se compose d'un cylindre A de cuivre

Fig. 1.



ou de plomb très lourd, suspendu par un fil de cuivre à l'intérieur d'un vase V trois fois plus large et rempli du fluide à étudier. Au cylindre qui émerge partiellement est fixé un index B qui se déplace au-dessus d'un cercle divisé C placé sur le vase.

On fait osciller le cylindre autour de son axe sans le déranger de sa position verticale et l'on suit la marche de l'index.

Dans une expérience que Coulomb rapporte tout au long, le cylindre était en plomb, pesait 1^{kg}, et avait 19 lignes de diamètre sur 26 lignes de hauteur.

Le cercle C avait 44 lignes de diamètre. Après avoir mis le cylindre en mouvement, il attendit, avant de commencer les observations, que les oscillations n'eussent plus qu'une amplitude d'environ $3^{\circ}55'$. En s'aidant alors d'une loupe, Coulomb put compter 14 oscillations avant

que le cylindre eût atteint l'immobilité complète. Supposons que dans des oscillations aussi lentes, les termes qui dépendent de la vitesse deviennent négligeables et que l'effet de l'adhérence devienne prépondérant; s'il est bien constant, l'amplitude doit diminuer d'une quantité fixe à chaque oscillation. Coulomb remarquant qu'il faut 14 oscillations pour amener à zéro une amplitude primitivement égale à 3° 55′ en conclut la diminution d'amplitude pour une oscillation : $\frac{1}{14}$ de 3° 55′, c'est-à-dire évaluant les arcs en parties du rayon

$$\frac{1}{14}\left(3+\frac{55}{60}\right)\times\frac{\pi}{180}.$$

On a donc

$$\frac{1}{14}\left(3+\frac{55}{60}\right)\times\frac{\pi}{180}=\frac{2R}{C}, \tag{1}$$

C désignant la constante de torsion du fil et R le moment de l'adhérence cherchée par rapport à l'axe de rotation.

La constante de torsion C du fil était déduite d'expériences de torsion sur un fil de nature identique, mais plus court, en admettant la proportionnalité de C à l'inverse de la longueur.

La formule (1) donnait donc R.

Mais R est le moment de l'adhérence relative à la surface immergée du cylindre; des dimensions du cylindre on conclut facilement la valeur de la *force d'adhérence* par unité de surface; c'est la valeur d cherchée. Coulomb trouve pour la valeur de d exprimée en livres par pied carré :

$$d=\frac{1}{\overline{144}^2\times 2345000},$$

soit en dynes par centimètre carré : $1{,}94\times 10^{-1}$, d'après M. Potier.

Comme on le voit, le terme constant d est très petit et deviendra négligeable dès que les vitesses prendront une valeur un peu notable, comme dans les expériences sur la viscosité.

En tordant le fil de 2 ou 3 circonférences, Coulomb crut reconnaître que, v augmentant, le frottement devient proportionnel à v et devient ensuite, pour les grandes vitesses, proportionnel à v^2, la grandeur du terme constant d étant alors absolument négligeable devant celle du terme en v ou en v^2. Mais, Coulomb ne considérait pas ces expériences comme définitives, et il dit lui-même : « Ces expériences demandent un travail exprès et à être faites dans différents fluides. »

5. Second Mémoire [1]. **Expériences sur la cohérence des fluides.** — Ce n'est qu'en 1801 que Coulomb reprit ces recherches. Le titre de son Mémoire est : *Expériences destinées à déterminer la cohérence des fluides et les lois de leur résistance dans les mouvements très lents.*

Nous savons que la résistance opposée par un fluide à un solide qui se meut se compose de trois termes : le premier dû à l'inertie du fluide, le second à l'adhérence, le troisième à la cohérence (viscosité).

Ces trois causes interviennent à la fois, avec une plus ou moins grande importance relative, suivant les conditions de l'expérience.

Ce que Coulomb a cherché à préciser, dans ce Mémoire, c'est l'effet de la viscosité, en tâchant de se placer dans des conditions telles que l'inertie n'eût pas d'influence. Quant à l'adhérence proprement dite, il savait déjà que son effet était à peu près négligeable; il s'en assura d'ailleurs dans ses nouvelles expériences d'une manière directe.

Pour éliminer l'influence de l'inertie, il fallait choisir une forme de corps solide telle que la forme extérieure du fluide ne fût pas changée. Coulomb a choisi un disque horizontal oscillant lentement dans son plan autour de son axe vertical. De la sorte, le mouvement du disque n'exerce sur le fluide que des actions tangentielles; si le fluide était parfait (sans viscosité), le disque devrait osciller indéfiniment (en supposant le fil de suspension d'une élasticité parfaite).

D'autre part, comme Coulomb le pensait déjà et comme les expériences nouvelles le lui ont confirmé, la résistance est, en général, dans le cas de mouvements lents, représentée par une formule à deux termes

$$av^2 + bv.$$

Pour étudier chacun de ces deux termes et connaître ainsi leur importance relative, Coulomb observe qu'en donnant à v des valeurs suffisamment petites, le terme en v^2 devient négligeable devant le terme en v. Il est vrai que, dans ce cas, la résistance est elle-même très faible, il faudra donc un moyen très délicat pour la mesurer.

Puis, en produisant des oscillations plus rapides, on peut arriver à rendre prépondérant à son tour le terme en v^2 et, même, à rendre le

(1) Coulomb, *Mémoires de l'Institut* (*Savants étrangers*), t. III, 1801 (an IX) et *Mémoires relatifs à la Physique*, publiés par la Société française de Physique, t. I, p. 333.

terme en v relativement négligeable (une vitesse de $0^m,2$ par seconde suffit).

Ainsi Coulomb avait bien vu les conditions essentielles à remplir :

1° Trouver un mode de mesure exact des très petites forces;

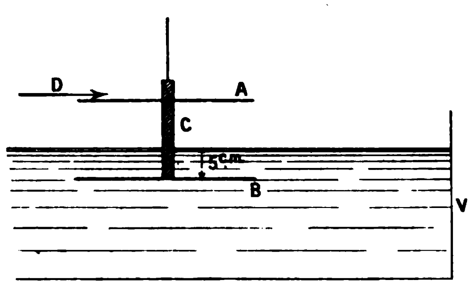
2° Donner à volonté des vitesses assez petites pour n'obtenir que le terme en v ou des vitesses assez grandes pour n'avoir que le terme en v^2;

3° Ne pas changer la forme extérieure du fluide afin de bien savoir ce qu'on étudie.

Son appareil lui a permis de remplir ces conditions.

6. **Description de l'appareil et expériences.** — A un fil métallique fin est suspendue une tige cylindrique C en cuivre ayant 10^{mm} à 12^{mm} de diamètre; cette tige traverse un disque A (*fig.* 2) portant sur son

Fig. 2.



pourtour une graduation en 480 parties, mobile en face d'un index D fixe, et sur lequel on peut lire les déplacements angulaires du système; la tige plonge de 4^{cm} ou 5^{cm} dans un vase plein d'eau, V, très large (80^{cm} de diamètre) et très haut (40^{cm} de hauteur). C'est au-dessous de la tige et contre elle que l'on applique le disque B que l'on veut faire osciller.

On fait tourner le disque à la main, de manière à tordre le fil sans décentrer le système, puis on l'abandonne à lui-même. Le couple de torsion le fait osciller; de 10 en 10 oscillations, on lit l'amplitude sur le disque A.

L'amortissement provient de trois causes :

1° Résistance éprouvée par le disque B; c'est le terme principal, celui que l'on veut mesurer;

2° Résistance exercée par l'air sur le disque A et sur la partie

émergente de la tige C, augmentée de la résistance exercée par l'eau sur la portion immergée de la tige;

3° Frottement intérieur du fil de suspension, dont l'élasticité est imparfaite.

On calcule la correction due à ces deux dernières causes en retirant le disque B et en étudiant l'amortissement du système restant.

7. Mode de calcul d'après Coulomb. — Soient :

I, le moment d'inertie du système oscillant;

θ, l'angle dont le système est dévié, compté à partir de la position d'équilibre;

n, le coefficient de torsion du fil.

Coulomb suppose que la force résistante exercée sur un élément de surface du corps oscillant est de la forme

$$a_1 v + b_1 v^2.$$

On a alors

$$\text{(1)} \qquad I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -n\theta - \left[a\frac{d\theta}{dt} + b\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right];$$

la quantité entre crochets dans le deuxième membre représente le couple résistant dû au fluide.

Il s'agit d'intégrer l'équation (1).

Dans une première approximation, négligeons les termes de résistance et écrivons

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -n\theta;$$

d'où

$$\theta = \theta_0 \sin 2\pi\frac{t}{T},$$

en posant

$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{n}{I}}, \qquad \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{t=0} = 0.$$

On a aussi (intégration de l'équation des forces vives de o à t) :

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{n}{I}}\sqrt{\theta_0^2 - \theta^2}.$$

Portons cette valeur approchée dans les termes de résistance qui sont supposés petits, l'équation (1) devient

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -n\theta - a\sqrt{\frac{n}{I}}\sqrt{\theta_0^2 - \theta^2} - b\frac{n}{I}(\theta_0^2 - \theta^2).$$

Multiplions par $2\frac{d\theta}{dt}$ et intégrons ; il vient

$$(2)\quad I\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = n(\theta_0^2-\theta^2) - 2a\sqrt{\frac{n}{I}}\int_{\theta_0}^{\theta}\sqrt{(\theta_0^2-\theta^2)}\,d\theta - 2b\frac{n}{I}\int_{\theta_0}^{\theta}(\theta_0^2-\theta^2)\,d\theta.$$

On peut tirer de là la valeur approchée de la perte relative d'amplitude au bout d'une oscillation.

Appelons θ_1 l'amplitude au bout de la première oscillation ; la perte relative en question est

$\frac{\theta_0-|\theta_1|}{\theta_0}$ (il faut prendre la valeur absolue $|\theta_1|$, car θ_1 est négatif).

Or, en faisant $\theta=\theta_1$ dans (2), on a

$$I\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{\theta=\theta_1} = n(\theta_0^2-\theta_1^2) - 2a\sqrt{\frac{n}{I}}\int_{\theta_0}^{\theta_1}\sqrt{(\theta_0^2-\theta^2)}\,d\theta - 2b\frac{n}{I}\int_{\theta_0}^{\theta_1}(\theta_0^2-\theta^2)\,d\theta.$$

Remarquons maintenant que $\frac{d\theta}{dt}$ est nul pour $t=0$ $(\theta=\theta_0)$ et l'est encore pour $\theta=\theta_1$ (une oscillation après).

D'autre part, la perte d'amplitude étant faible, θ_1 est très voisin de $-\theta_0$; on peut donc remplacer θ_1 par $-\theta_0$ dans les termes de résistance et écrire

$$0 = n(\theta_0^2-\theta_1^2) - 2a\sqrt{\frac{n}{I}}\int_{\theta_0}^{-\theta_0}\sqrt{\theta_0^2-\theta^2}\,d\theta - 2b\frac{n}{I}\int_{\theta_0}^{-\theta_0}(\theta_0^2-\theta^2)\,d\theta$$

ou bien

$$n(\theta_0^2-\theta_1^2) = 2a\sqrt{\frac{n}{I}}\int_{\theta_0}^{-\theta_0}\sqrt{\theta_0^2-\theta^2}\,d\theta + 2b\frac{n}{I}\int_{\theta_0}^{-\theta_0}(\theta_0^2-\theta^2)\,d\theta;$$

d'où, en effectuant les intégrations et en simplifiant

$$\frac{\theta_0-|\theta_1|}{\theta_0} = \frac{\pi a}{2n}\sqrt{\frac{n}{I}} + \frac{4}{3}\frac{b}{I}\theta_0,$$

ce qu'on peut écrire

$$(3)\qquad \frac{\theta_0-|\theta_1|}{\theta_0} = m + p\theta_0,$$

en posant

$$\frac{\pi a}{2n}\sqrt{\frac{n}{I}} = m \quad \text{et} \quad \frac{4}{3}\frac{b}{I} = p.$$

Ainsi, quand la résistance est faible, les approximations précédentes étant alors légitimes, on peut, dans l'expression de la perte relative d'amplitude, séparer deux termes, l'un constant, l'autre proportionnel à l'amplitude initiale θ_0.

8. **Cas où la résistance est proportionnelle à la vitesse seule.** — Si les mouvements deviennent assez lents pour que dans l'expression de la résistance le terme dépendant du carré de la vitesse puisse être négligé devant l'autre, tous les termes contenant la constante b disparaissent dans le calcul précédent et la relation (3) devient (en prenant maintenant tous les θ en valeur absolue) :

$$\frac{\theta_0 - \theta_1}{\theta_0} = m;$$

d'où

$$\frac{\theta_1}{\theta_0} = 1 - m \qquad \text{et} \qquad \frac{\theta_q}{\theta_0} = (1-m)^q,$$

θ_q désignant l'amplitude de la $q^{\text{ième}}$ oscillation.

On peut donc écrire

$$\frac{\operatorname{Log}\theta_0 - \operatorname{Log}\theta_q}{q} = -\operatorname{Log}(1-m) = \text{const.}$$

Ainsi le quotient écrit dans le premier membre est constant quelque soit q (c'est le décrément logarithmique).

9. **Première série d'expériences.** — Coulomb employa un premier disque de fer blanc fixé à l'aide d'une vis sous la tige de cuivre; ce disque avait 195^{mm} de diamètre. Le système oscillait très lentement (4 oscillations en 97 secondes).

Numéros d'ordre des expériences.	θ_0.	q.	θ_q.	$\dfrac{\operatorname{Log}\theta_0 - \operatorname{Log}\theta_q}{q}$.
1	192	10	52,3	0,0565
2	13,8	10	3,3	0,0571

On voit que

$$\frac{\operatorname{Log}\theta_0 - \operatorname{Log}\theta_q}{q}$$

est constant dans ces expériences et égal à 0,057 environ.

D'après les raisonnements du n° 7 *la résistance est donc proportionnelle à la vitesse.*

10. Autres séries d'expériences. Influence du diamètre du disque. — Coulomb compara des disques de différents diamètres; il trouva encore, pour chacun d'eux, un décrément logarithmique constant, c'est-à-dire une résistance proportionnelle à la seule vitesse, dans le cas des mouvements lents.

Voici les résultats d'ensemble :

Nature du disque.	Diamètre.	Valeur moyenne du décrément logarithmique.	Durée de quatre oscillations.
Fer-blanc..............	195	0,057	97[s]
Fer-blanc..............	140	0,021	92
Fer-blanc..............	119	0,0135	91
Sans mettre de disque...............		0,0058	

Ces données nous permettent de calculer la valeur de m pour chaque disque. Voyons pour le premier.

La résistance av est la somme de deux parties $a_1 v$ et $a_2 v$, l'une due au disque seul, l'autre au système débarrassé du disque.

Appelons m, m_1, m_2 les valeurs de m relatives au système muni du disque, au disque seul, au système sans disque, on a

$$m_1 = m - m_2;$$

$$\text{Log}(1 - m) = -0{,}057 \qquad \text{(avec le premier disque)},$$

$$\text{Log}(1 - m_2) = -0{,}0058;$$

d'où

$$1 - m = 10^{-0{,}057},$$

$$1 - m_2 = 10^{-0{,}0058};$$

ou enfin

$$m = \frac{10^{0{,}057} - 1}{10^{0{,}057}} = 0{,}126,$$

$$m_2 = \frac{10^{0{,}0058} - 1}{10^{0{,}0058}} = 0{,}013;$$

d'où

$$m_1 = 0{,}113.$$

Pour les deux autres disques les valeurs de m_1, calculées de même, sont :

Deuxième disque........................	0,034
Troisième disque........................	0,0176

D'autre part, m est relié à a par la formule

$$\frac{m}{\sqrt{\frac{n}{I}}} = \frac{\pi a}{2n}.$$

Connaissant m, n, I on tire a.

Cela posé, pour déterminer l'influence du diamètre, Coulomb procéda de la manière suivante :

Il calcula pour chaque disque les valeurs de mT, T étant la durée de 4 oscillations. Ce produit est égal à

$$4m\sqrt{\frac{I}{n}} = 4\frac{m}{\sqrt{\frac{n}{I}}}$$

et, par conséquent, proportionnel à a. Il calcula ensuite les logarithmes de ces nombres et prit leurs différences deux à deux. Il obtint le Tableau suivant :

	Log mT.	Différences.
Premier disque................	1,0397	
		0,5345
Deuxième disque....	0,5052	
		0,2602
Troisième disque..............	0,2450	

Il calcula ensuite les logarithmes des diamètres et leurs différences deux à deux :

	Log diamètre.	Différences.
Premier disque..........	2,2900	
		0,1439
Deuxième disque........	2,1461	
		0,0706
Troisième disque........	2,0755	

Il constata que ces différences multipliées par 4 (0,576, 0,282) reproduisent sensiblement les différences des valeurs de Log$m$T ; d'où la loi suivante :

Les coefficients a et, par suite, les résistances varient comme les quatrièmes puissances des diamètres.

11. **Conclusion. Résistance proportionnelle à la vitesse.** — De tout ce qui précède le résultat le plus important à retenir est que la résistance est proportionnelle à la vitesse quand les mouvements sont assez lents. Cette loi, rapprochée de la loi des diamètres, nous amène à conclure que : *La résistance est la même par unité de surface et par unité de vitesse en chaque point d'un disque quelconque, dans le cas des mouvements lents.*

12. **Expériences avec deux tiges croisées.** — Dans ces expériences, Coulomb remplaça le disque inférieur par deux tiges horizontales fixées en croix sous la tige-support verticale. Il est clair que le mou-

vement dans ce cas modifie la forme extérieure du fluide, qui doit contourner les tiges, et que des vitesses angulaires du même ordre que dans les expériences sur les disques donnent naissance à des vitesses linéaires beaucoup plus grandes; l'effet de l'inertie doit se faire sentir. Coulomb vit, en effet, apparaître nettement un terme proportionnel à v^2, et trouva, pour les dimensions employées,

$$m = 0{,}039, \qquad p = 0{,}00135.$$

Il répéta enfin les mêmes expériences avec une seule tige horizontale et retrouva les mêmes résultats qu'avec les deux tiges croisées.

13. Expériences avec l'huile. — Coulomb a employé la méthode du disque oscillant pour étudier le frottement de l'huile de quinquet épurée et trouva, pour des disques de même diamètre, la résistance 17 fois plus grande dans l'huile que dans l'eau (à 20° C.). Ce rapport serait différent à une autre température.

Le coefficient m varie donc d'un liquide à l'autre.

Quant au coefficient p, qui n'est pas négligeable dans le cas des tiges, on trouve à peu près la même valeur pour l'huile et pour l'eau qui ont des densités peu différentes. Ce résultat est intéressant, car il montre que le terme bv^2 (b est proportionnel à p) dans l'expression de la résistance dépend de l'inertie du fluide bien plus que de sa viscosité; il doit être proportionnel à la densité du fluide.

14. Influence de l'état de la surface. — La nature de la surface d'un disque oscillant n'a aucune influence sur la résistance du fluide. Le décrément logarithmique s'est trouvé le même dans les trois expériences faites avec un disque en fer-blanc, oscillant dans l'eau et dont la surface était nue dans une première expérience, enduite de suif dans une deuxième expérience, enduite de suif et saupoudrée de grès dans une troisième expérience. Les résistances observées mesurent bien quelque chose qui est propre au fluide lui-même.

15. Influence de la pression. — La pression qu'exerce le fluide sur les faces du disque oscillant n'a aucune influence sur l'amortissement; le frottement liquide diffère complètement du frottement solide à ce point de vue.

C'est ce qu'a constaté Coulomb en immergeant le disque oscillant à des profondeurs diverses (de 5^{cm} à 60^{cm}) et même en faisant osciller

l'appareil sous la cloche de la machine pneumatique : les pertes d'amplitude n'ont pas varié.

16. Résultats généraux de ces expériences. — L'amortissement des oscillations du disque, dont la rotation se fait sans déformation de la surface qui limite le liquide, exige que le disque subisse des actions tangentielles de la part du liquide; le liquide participe lui-même à ce mouvement de rotation alternative pure, comme on peut s'en assurer par l'observation des poussières en suspension; on voit ainsi que l'amplitude de ce mouvement diminue, et que le retard en phase augmente depuis le disque oscillant jusqu'aux parois fixes. Chaque couche de révolution subit donc un couple variable qui ne peut provenir que d'actions tangentielles internes au liquide.

De ces remarques purement qualitatives résultent déjà deux propriétés :

1° *Entre un fluide (liquide ou gaz) et un solide (mouillé ou non) peuvent s'exercer des actions tangentielles.*

L'existence de ces actions, même au repos, lorsque le solide est mouillé, est une conséquence nécessaire de l'adhésion de la couche qui mouille, bien que dans la théorie de la capillarité on se contente de constater le fait sans l'analyser en détail.

Les expériences sur les disques graissés montrent que le fait est plus général, et que ces forces tangentielles existent même quand la surface n'est pas mouillée.

2° *Dans l'intérieur d'un fluide en mouvement peuvent s'exercer des actions tangentielles, liées aux glissements relatifs des parties contiguës du fluide.*

Remarquons que l'expérience met en évidence ces actions tangentielles généralement petites, sans exclure la possibilité d'actions normales de même origine; mais celles-ci ne peuvent pas être mises en évidence d'une manière aussi directe, à cause de la pression générale hydrostatique qui les masque. Nous verrons que leur existence est nécessaire.

Dans une portion de fluide qui se meut comme un solide, c'est-à-dire animée d'une translation et d'une rotation d'ensemble, sans déformation, l'observation vulgaire nous apprend qu'aucun frottement interne ne se produit, pas plus que dans un solide invariable. C'est donc aux vitesses de déformation que ces forces de viscosité sont liées, à l'exclusion des vitesses de translation et de rotation.

3° Enfin les expériences quantitatives de Coulomb nous apprennent que, dans les mouvements lents, l'action totale est proportionnelle à la vitesse relative des parois. Nous en concluons que *les actions élémentaires sont liées linéairement aux vitesses de déformation élémentaire internes, et aux vitesses de glissement à la paroi.*

Tels sont les faits d'observation que nous allons analyser dans le Chapitre suivant, pour leur donner leur forme mathématique générale, et en tirer, sans aucune hypothèse, la théorie de la viscosité applicable, à coup sûr, aux mouvements lents des fluides naturels.

CHAPITRE II.

ÉQUATIONS DU MOUVEMENT LENT D'UN FLUIDE VISQUEUX.

A. ÉQUATIONS INTÉRIEURES.

17. Équations du mouvement d'un fluide. — Sans nous préoccuper des mouvements intérieurs analogues à la diffusion, dans lesquels les théories moléculaires trouvent l'explication de la viscosité des fluides, nous supposons, comme dans l'Hydrodynamique classique, qu'on puisse diviser arbitrairement le fluide en un nombre immense de très petits volumes élémentaires où le fluide soit homogène et continu et à l'intérieur desquels il n'y ait pas de mouvements relatifs, et nous traitons ces volumes comme infiniment petits.

Nous supposons, en outre, les mouvements assez lents pour que la loi élémentaire, relative aux forces de frottement, déduite des expériences de Coulomb soit applicable.

Soient u, v, w les projections sur trois axes rectangulaires fixes de la vitesse d'un élément de volume de liquide dont le centre de gravité passe, au temps t, au point x, y, z.

u, v, w sont des fonctions de x, y, z, t.

Si l'on suit une masse liquide dans son mouvement, l'accélération de son centre de gravité $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dw}{dt}$, au temps t, est donnée, comme on sait depuis Euler, par les équations établies dans tous les Traités de Mécanique :

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z},$$
$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z},$$
$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial u} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}.$$

Représentons par X_x, Y_x, Z_x les forces qu'exerce à travers l'unité

de surface la partie du fluide située du côté positif de la face, sur celle qui est du côté négatif.

Si l'on considère un petit élément de volume $dx\,dy\,dz$ ayant la forme d'un parallélépipède dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées, les forces $X_x, \ldots, Z_z$ variables en x, y, z, t appliquées aux faces du parallélépipède ont pour projection totale sur Ox :

$$\left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz.$$

Les équations du mouvement d'un fluide sans frottement sont donc

$$\text{(I)}\quad \begin{cases} \dfrac{\partial X_x}{\partial x} + \dfrac{\partial X_y}{\partial y} + \dfrac{\partial X_z}{\partial z} + X_e = \rho\left(\dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} + w\dfrac{\partial u}{\partial z}\right), \\ \dfrac{\partial Y_x}{\partial x} + \dfrac{\partial Y_y}{\partial y} + \dfrac{\partial Y_z}{\partial z} + Y_e = \rho\left(\dfrac{\partial v}{\partial t} + u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} + w\dfrac{\partial v}{\partial z}\right), \\ \dfrac{\partial Z_x}{\partial x} + \dfrac{\partial Z_y}{\partial y} + \dfrac{\partial Z_z}{\partial z} + Z_e = \rho\left(\dfrac{\partial w}{\partial t} + u\dfrac{\partial w}{\partial x} + v\dfrac{\partial w}{\partial y} + w\dfrac{\partial w}{\partial z}\right), \end{cases}$$

en appelant X_e, Y_e, Z_e la force extérieure appliquée à l'unité de volume (pesanteur, force électrique, électromagnétique, etc.).

La densité ρ varie, d'un point à l'autre, lorsque le fluide est compressible.

L'excès de la masse de liquide qui s'accumule dans l'élément de volume pendant l'unité de temps est

$$-\left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w)\right] dx\,dy\,dz\,dt.$$

Or, ce qui s'accumule ainsi est aussi égal à $\frac{\partial\rho}{\partial t}\,dx\,dy\,dz\,dt$; d'où l'*équation de continuité*

$$\text{(I')}\quad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0.$$

18. Relations entre les pressions sur différentes faces. — Dans un fluide parfait, les composantes des pressions X_x, Y_y, ..., Z_z se réduisent à une pression uniforme

$$X_x = Y_y = Z_z = -p, \qquad X_y = Y_x = Y_z = Z_y = X_z = Z_x = 0;$$

mais il n'en est pas de même dans les fluides naturels. Les expériences de Coulomb, sur les couples qui résistent à la rotation de corps de révolution, mettent hors de doute l'existence des forces tangentielles $X_y, \ldots, Z_x, \ldots$.

Avant de chercher comment ces forces dépendent des vitesses relatives, il convient d'établir quelques relations générales :

1° La production d'une accélération angulaire n'exige qu'un couple proportionnel au moment d'inertie, c'est-à-dire au volume de l'élément multiplié par le produit de deux des côtés; or, les forces X_x donnent, sur un parallélépipède $dx\,dy\,dz$, des couples moteurs

$$(Y_z - Z_y)\,dx\,dy\,dz,\quad (Z_x - X_z)\,dx\,dy\,dz,\quad (X_y - Y_x)\,dx\,dy\,dz,$$

proportionnels aux volumes. Les couples moteurs et les couples d'inertie ne sont pas du même ordre d'homogénéité; pour des forces $Y_z, \ldots$ finies par unité de surface et des accélérations angulaires finies, les couples moteurs seraient incomparablement plus grands que les couples d'inertie, à moins que l'on n'ait

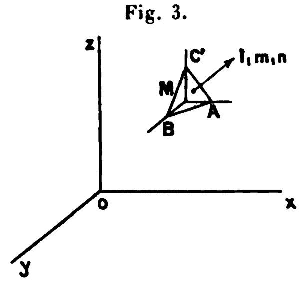
$$Y_z - Z_y = 0,\quad Z_x - X_z = 0,\quad X_y - Y_x = 0.$$

Ces conditions sont donc nécessaires.

2° La connaissance des pressions exercées à travers trois faces formant un trièdre détermine les pressions sur une face quelconque.

Considérons, en particulier (*fig.* 3), un trièdre trirectangle,

Fig. 3.



MABC, et coupons-le par une face hypoténuse ABC, dont la normale est définie par ses cosinus l, m, n avec les axes.

Soient $X_1 Y_1 Z_1$ les projections sur les axes de la pression à travers une surface parallèle de l'hypoténuse, mais ayant son centre au sommet du trièdre; soient $X_1 + \delta X_1$, $Y_1 + \delta Y_1$, $Z_1 + \delta Z_1$ les valeurs relatives à la face hypoténuse elle-même, et S l'étendue de cette face; les trois autres faces du trièdre sont les projections de la face hypoténuse, lS, mS, nS.

Les composantes suivant Ox des forces sur les quatre faces sont respectivement

$$-lSX_x,\quad -mSX_y,\quad -nSX_z,\quad +S(X_1 + \delta X_1),$$

et leur somme

$$S(X_1 - l X_x - m X_y - n X_z) + S\,\delta X_1$$

est la force motrice sur l'élément de volume limité par le tétraèdre. Cette force se compose d'un terme proportionnel à la surface S, apparent dans la formule, et d'un autre $S\delta X_1$ proportionnel au volume; ce dernier terme est identique à celui qu'on a introduit dans l'équation du mouvement du parallélépipède, comme on s'en assure facilement en le développant. Reste le premier terme, qui, étant le seul de son degré d'homogénéité dans l'équation de translation, doit être nul séparément

$$X_1 = l X_x + m X_y + n X_z$$

et de même

$$Y_1 = l Y_x + m Y_y + n Y_z,$$
$$Z_1 = l Z_x + m Z_y + n Z_z.$$

Ces conditions, données simultanément par Lamé et Cauchy, sont connues sous le nom d'*équations du tétraèdre*.

19. Quadrique de référence. Plans principaux. — Au Tableau de forces

X_x,	Y_x,	Z_x,	face normale	à x,
X_y,	Y_y,	Z_y,	»	à y,
X_z,	Y_z,	Z_z,	»	à z,

les conditions précédentes permettent de substituer, en adoptant les notations de Lamé, le Tableau symétrique

(II)

N_1,	T_3,	T_2,	face normale	à x,
T_3,	N_2,	T_1,	»	à y,
T_2,	T_1,	N_3,	»	à z,

où N désigne une composante normale et T une composante tangentielle.

Les équations du tétraèdre deviennent

$$\text{(III)}\qquad \begin{cases} X_1 = l N_1 + m T_3 + n T_2, \\ Y_1 = l T_3 + m N_2 + n T_1, \\ Z_1 = l T_2 + m T_1 + n N_3, \end{cases}$$

dont la forme symétrique montre que la direction de la force $X_1\,Y_1\,Z_1$

est conjuguée de la face à laquelle elle est appliquée, dans la surface du deuxième degré centrée

$$(1) \qquad N_1\xi^2 + N_2\eta^2 + N_3\zeta^2 + 2T_1\eta\zeta + 2T_2\xi\zeta + 2T_3\eta\xi = \pm 1.$$

Il y a donc toujours trois plans principaux rectangulaires sur lesquels l'action est purement normale.

Remarque. — Il peut d'ailleurs y avoir un cône d'action purement tangentielle, le cône asymptote de la surface, lorsque celle-ci se compose de deux hyperboloïdes; mais cela n'est pas inévitable; il peut n'y avoir aucune face sur laquelle l'action soit purement tangentielle. Au contraire, et quelle que soit la loi de viscosité adoptée, le trièdre trirectangle où les actions sont purement normales ne fait jamais défaut et, sur une face arbitraire, la composante normale ne peut être nulle qu'exceptionnellement.

En outre, on a

$$lX_1 + mY_1 + nZ_1 = l^2N_1 + \ldots + 2mnT_1 + \ldots = \frac{1}{r^2},$$

en appelant r le rayon vecteur de la quadrique (1) suivant la normale à la face.

La composante normale à la face est donc égale à l'inverse du carré du rayon vecteur de la quadrique (1).

Par conséquent, la force elle-même est égale à l'inverse du produit du rayon vecteur par la distance du centre au plan tangent parallèle à la face.

20. Vitesses relatives. Rotation élémentaire. — Il faut maintenant trouver les relations entre ces forces N, T et les dérivées locales de la vitesse.

Soient u, v, w les vitesses du fluide au point xyz, à un certain instant t; les vitesses en un point voisin $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ sont

$$u + \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz,$$

$$v + \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz,$$

$$w + \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz.$$

La *vitesse relative* du deuxième point a pour composantes :

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}\,dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}\,dy + \dfrac{\partial u}{\partial z}\,dz, \\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial x}\,dx + \dfrac{\partial v}{\partial y}\,dy + \dfrac{\partial v}{\partial z}\,dz, \\[2mm] \dfrac{\partial w}{\partial x}\,dx + \dfrac{\partial w}{\partial y}\,dy + \dfrac{\partial w}{\partial z}\,dz. \end{cases}$$

Les forces de frottement, dépendant seulement des vitesses relatives et étant des fonctions linéaires et homogènes de ces vitesses, sont donc fonctions linéaires et homogènes des neuf dérivées premières de u, v, w.

Mais ces neuf dérivées n'entrent pas toutes, d'une manière indépendante, dans l'expression de ces forces.

Il est clair que tout mouvement d'ensemble du fluide, identique à celui d'un solide, n'a aucune influence sur les forces de frottement.

Or le mouvement d'ensemble le plus général d'un corps est donné par les formules

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 + \eta z - \zeta y, \\ v_1 &= v_0 + \zeta x - \xi z, \\ w_1 &= w_0 + \xi y - \eta x. \end{aligned}$$

u_0, v_0, w_0 représentent une translation d'ensemble et, leurs dérivées étant nulles, s'éliminent d'elles-mêmes. ξ, η, ζ représentent une rotation autour d'un axe passant par l'origine : ce sont les projections du vecteur qui représente en grandeur, direction et sens, la vitesse angulaire de ce mouvement. Elles sont fonctions de t seulement.

On a, d'après ces formules :

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial z} = -\dfrac{\partial w_1}{\partial x} = \eta, \\[2mm] \dfrac{\partial v_1}{\partial x} = -\dfrac{\partial u_1}{\partial y} = \zeta. \\[2mm] \dfrac{\partial w_1}{\partial y} = -\dfrac{\partial v_1}{\partial z} = \xi. \end{cases}$$

Si donc on retranche des dérivées, dans les expressions (1), des constantes indiquées par les formules (2), ce qui revient à retrancher du mouvement étudié un mouvement d'ensemble, les forces de frottement ne seront pas changées malgré le changement des vitesses

relatives qui deviennent

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial x}\,dx + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \zeta\right) dy + \left(\dfrac{\partial u}{\partial z} - \eta\right) dz, \\ \left(\dfrac{\partial v}{\partial x} - \zeta\right) dx + \dfrac{\partial v}{\partial y}\,dy + \left(\dfrac{\partial v}{\partial z} + \xi\right) dz, \\ \left(\dfrac{\partial w}{\partial x} + \eta\right) dx + \left(\dfrac{\partial w}{\partial y} - \xi\right) dy + \dfrac{\partial w}{\partial z}\,dz. \end{array}\right.$$

Les forces de frottement ne dépendent que de six combinaisons linéaires indépendantes entre les neuf dérivées, puisque l'on peut introduire dans les expressions des vitesses relatives les trois constantes arbitraires ξ, η, ζ, sans changer le frottement interne.

Pour ces combinaisons, nous adopterons le choix de *Stokes :*

$$(4)\qquad \frac{\partial u}{\partial x},\quad \frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial w}{\partial z},\quad \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z},\quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x},\quad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y},$$

qu'on obtient en donnant à la rotation ξ, η, ζ les valeurs particulières

$$\xi = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right),\qquad \eta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right),\qquad \zeta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

qui ne laissent subsister dans (3) que les six combinaisons (4).

ξ, η, ζ est une rotation d'ensemble qu'on peut attribuer à l'élément de volume et qui s'ajoute à la déformation (4).

21. Les six composantes de la vitesse de déformation. — Pour simplifier l'écriture dans ce qui va suivre, nous représenterons les dérivées par les notations suivantes :

$$u'_x,\quad v'_y,\quad w'_z,\quad u'_y,\quad \ldots.$$

Soient, à l'instant t, M et M' deux points voisins dans le fluide; x, y, z les coordonnées du premier, $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$ celles du second.

Leur distance δs est donnée par

$$(5)\qquad (\delta s)^2 = \delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2.$$

Au bout du temps dt, les coordonnées des éléments de fluide qui se trouvaient en ces points sont devenues :

Pour M :

$$x + u\,dt,\quad y + v\,dt,\quad z + w\,dt;$$

Pour M' :

$$(6)\qquad \begin{cases} x+\delta x+u\,dt+(u'_x\,\delta x+u'_y\,\delta y+u'_z\,\delta z)\,dt,\\ y+\delta y+v\,dt+(v'_x\,\delta x+v'_y\,\delta y+v'_z\,\delta z)\,dt,\\ z+\delta z+w\,dt+(w'_x\,\delta x+w'_y\,\delta y+w'_z\,\delta z)\,dt,\end{cases}$$

$(\delta s)^2$ devient $(\delta s')^2$:

$$\begin{aligned}(\delta s')^2 = {} & [(1+u'_x\,dt)\,\delta x+u'_y\,\delta y\,dt+u'_z\,\delta z\,dt]^2\\ & +[v'_x\,\delta x\,dt+(1+v'_y\,dt)\,\delta y+v'_z\,\delta z\,dt]^2\\ & +[w'_x\,\delta x\,dt+w'_y\,\delta y\,dt+(1+w'_z\,dt)\,\delta z]^2,\end{aligned}$$

ou, en développant les carrés et en négligeant $(dt)^2$:

$$(7)\qquad (\delta s')^2 = \Sigma(\delta x)^2(1+2u'_x\,dt)+2\,\Sigma\,\delta x\,\delta y\,dt(u'_y+v'_x),$$

d'où

$$(8)\qquad (\delta s')^2-(\delta s)^2 = 2\delta s\frac{d}{dt}(\delta s)\,dt = 2\,dt[\Sigma\,u'_x(\delta x)^2+\Sigma(u'_y+v'_x)\,\delta x\,\delta y].$$

L'accroissement $\frac{d}{dt}(\delta s)\,dt$ de δs est fonction linéaire et homogène des six quantités

$$\begin{array}{ll} u'_x,\quad v'_y,\quad w'_z, & \text{vitesses de dilatation;}\\ u'_y+v'_x,\quad v'_z+w'_y,\quad w'_x+u'_z, & \text{vitesses de glissement.}\end{array}$$

Si ces six quantités sont nulles, δs reste invariable.

Il est facile de reconnaître que, dans un petit parallélépipède parallèle aux axes de coordonnées, u'_x, v'_y, w'_z représentent les vitesses d'allongement des côtés; $w'_y+v'_z$, $u'_z+w'_x$, $v'_x+u'_y$ sont les vitesses de changement des angles des arêtes.

Ces six quantités définissent donc la vitesse de déformation d'un élément de volume.

22. Directions principales. — Une petite sphère, tracée autour d'un point M au temps t, devient, au bout d'un temps dt, un ellipsoïde.

Dans l'équation (7), changeons le signe de dt; δx, δy, δz se rapportent alors à l'état final, $\delta s'$ à l'état initial; pour une petite sphère décrite autour du point x, y, z, $\delta s'$ est constant, et l'équation (7), entre δx, δy, δz, est celle d'un ellipsoïde dont le centre est au point x, y, z.

Il y a donc un trièdre trirectangle ayant pour sommet le point M, qui reste trirectangle pendant la déformation et donne les trois axes de l'ellipsoïde. Dans la déformation rapportée à ces trois axes, les *glissements* correspondants sont nuls. La déformation est définie par la direction de ces axes, et la grandeur des dilatations linéaires correspondantes, qu'on appelle *dilatations principales*.

On appelle ces axes *directions principales*. Elles changent d'un point à l'autre du fluide et, en un même point, varient avec le temps.

23. Relations entre les forces et les vitesses rapportées au trièdre principal. — Nous venons de trouver deux groupes de trois plans principaux rectangulaires, l'un par rapport auquel les vitesses de déformation se groupent symétriquement, l'autre par rapport auquel les forces élastiques se groupent symétriquement.

D'autre part, pour un liquide dont l'équilibre est rigoureusement défini par les lois de l'hydrostatique, rien n'indique que les forces de viscosité dépendent d'autre chose que des vitesses de déformation.

Dans ces conditions les éléments de symétrie des forces élastiques et des vitesses de déformation ne peuvent pas différer. *Les deux trièdres de plans principaux coïncident.*

Prenons-les pour trièdres de références. Le Tableau des forces et celui des vitesses de déformation se réduisent à

$$\begin{matrix} \mathbf{N}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{N}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{N}_3 \end{matrix} \qquad\qquad \begin{matrix} \mathbf{u}'_\mathbf{x} & 0 & 0, \\ 0 & \mathbf{v}'_\mathbf{y} & 0, \\ 0 & 0 & \mathbf{w}'_\mathbf{z}; \end{matrix}$$

en appelant $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ les axes et $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ les composantes de la vitesse par rapport à ces axes.

Il résulte des expériences de Coulomb que, pour les mouvements lents, les relations sont linéaires.

On a donc

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_1 &= -p + \alpha_1 \mathbf{u}'_\mathbf{x} + \beta_1 \mathbf{v}'_\mathbf{y} + \gamma_1 \mathbf{w}'_\mathbf{z}, \\ \mathbf{N}_2 &= -p + \alpha_2 \mathbf{u}'_\mathbf{x} + \beta_2 \mathbf{v}'_\mathbf{y} + \gamma_2 \mathbf{w}'_\mathbf{z}, \\ \mathbf{N}_3 &= -p + \alpha_3 \mathbf{u}'_\mathbf{x} + \beta_3 \mathbf{v}'_\mathbf{y} + \gamma_3 \mathbf{w}'_\mathbf{z}; \end{aligned}$$

en appelant p la pression isotrope indépendante des vitesses de déformation, mais fonction de la densité.

Les neuf coefficients spécifiques $\alpha_1, \ldots, \gamma_3$, qui ne dépendent plus des vitesses de déformation, ne peuvent pas être tous différents.

D'abord, il n'y a, dans un liquide, aucune différence spécifique entre les trois directions principales; on a donc, par permutation circulaire,

$$\alpha_1 = \beta_2 = \gamma_3, \qquad \beta_1 = \gamma_2 = \alpha_3, \qquad \gamma_1 = \alpha_2 = \beta_3;$$

de même, il n'y a aucune différence spécifique entre les deux directions tangentielles sur une même face principale; donc

$$\beta_1 = \gamma_1.$$

En conséquence il ne reste que deux coefficients spécifiques distincts; mettant en évidence la vitesse de dilatation cubique

$$\mathbf{u}'_\mathbf{x} + \mathbf{v}'_\mathbf{y} + \mathbf{w}'_\mathbf{z} = \theta,$$

nous écrirons

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_1 &= \lambda\theta + 2\mu\mathbf{u}'_\mathbf{x} - p, \\ \mathbf{N}_2 &= \lambda\theta + 2\mu\mathbf{v}'_\mathbf{y} - p, \\ \mathbf{N}_3 &= \lambda\theta + 2\mu\mathbf{w}'_\mathbf{z} - p. \end{aligned}$$

24. Relations générales. — Le théorème du tétraèdre permet de passer aux forces qui agissent sur une face quelconque $x(lmn)$

$$X_x = l\mathbf{N}_1, \qquad Y_x = m\mathbf{N}_2, \qquad Z_x = n\mathbf{N}_3;$$

d'où, pour la composante normale,

$$N = lX_x + mY_x + nZ_x = l^2\mathbf{N}_1 + m^2\mathbf{N}_2 + n^2\mathbf{N}_3,$$

et pour la projection sur une autre direction $l'm'n'$, qui peut être tangente à la face si l'on a $ll' + mm' + nn' = 0$,

$$T = l'X_x + m'Y_x + n'Z_x = ll'\mathbf{N}_1 + mm'\mathbf{N}_2 + nn'\mathbf{N}_3.$$

D'où

$$\begin{aligned} N_1 &= \lambda\theta + 2\mu(l^2\mathbf{u}'_\mathbf{x} + m^2\mathbf{v}'_\mathbf{y} + n^2\mathbf{w}'_\mathbf{z}) - p, \\ T_3 &= 2\mu(ll'\,\mathbf{u}'_\mathbf{x} + mm'\,\mathbf{v}'_\mathbf{y} + nn'\,\mathbf{w}'_\mathbf{z}), \\ T_2 &= 2\mu(ll''\mathbf{u}'_\mathbf{x} + mm''\mathbf{v}'_\mathbf{y} + nn''\mathbf{w}'_\mathbf{z}). \end{aligned}$$

Or, les formules de passage d'un trièdre trirectangle **xyz** à un autre xyz caractérisé par les cosinus lmn, $l'm'n'$, $l''m''n''$, donnent

$$\begin{aligned} u &= l\,\mathbf{u} + m\,\mathbf{v} + n\,\mathbf{w}, \\ v &= l'\,\mathbf{u} + m'\,\mathbf{v} + n'\,\mathbf{w}, \\ w &= l''\mathbf{u} + m''\mathbf{v} + n''\mathbf{w}; \end{aligned}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial x} = l\,\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} + m\,\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} + n\,\frac{\partial}{\delta \mathbf{z}},$$
$$\frac{\partial}{\partial y} = l'\,\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} + m'\,\frac{\partial}{\delta \mathbf{y}} + n'\,\frac{\partial}{\delta \mathbf{z}},$$
$$\frac{\partial}{\partial z} = l''\,\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} + m''\,\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} + n''\,\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}};$$

d'où les formules types

$$\frac{\partial u}{\partial x} = l^2 \mathbf{u}'_{\mathbf{x}} + m^2 \mathbf{v}'_{\mathbf{y}} + n^2 \mathbf{w}'_{\mathbf{z}},$$
$$\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 2\,l'l''\,\mathbf{u}'_{\mathbf{x}} + 2\,m'm''\,\mathbf{v}'_{\mathbf{y}} + 2\,n'n''\,\mathbf{w}'_{\mathbf{z}}.$$

De là résultent les expressions générales des forces pour un trièdre d'orientation arbitraire

$$\text{IV)}\qquad \begin{cases} N_1 = \lambda\theta + 2\mu\dfrac{\partial u}{\partial x} - p, & T_1 = \mu\left(\dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z}\right), \\ N_2 = \lambda\theta + 2\mu\dfrac{\partial v}{\partial y} - p, & T_2 = \mu\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}\right), \\ N_3 = \lambda\theta + 2\mu\dfrac{\partial w}{\partial z} - p, & T_3 = \mu\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\right). \end{cases}$$

25. Influence de la compressibilité. — Il semble au premier abord que, pour les liquides incompressibles, on doive poser

$$\theta = 0,$$

et effacer les termes en θ.

Mais si ce raisonnement était légitime on pourrait aussi bien dire que, dans un liquide incompressible, ρ ne variant pas, la pression en chaque point doit rester constante. Ce serait une erreur physique et mathématique.

Au point de vue physique, les liquides sont compressibles, mais ils le sont très peu, c'est-à-dire qu'une variation très faible de la densité ρ produit une variation énorme de la pression. Ainsi, si l'on pose

$$p = f(\rho),$$

$f'(\rho)$ est énorme.

Là où ρ intervient directement, c'est-à-dire comme coefficient de l'accélération dans les équations de translation, les variations relatives de ρ sont tout à fait négligeables.

Dans l'équation de conservation de la matière, qui définirait les variations de ρ en fonction des vitesses si les vitesses étaient connues

rigoureusement, on néglige également ces variations parce que, dans l'application aux liquides usuels, on ne peut connaître la distribution des vitesses avec une précision suffisante (de l'ordre du millionième) pour en déduire la variation relative de ρ, même à 100 pour 100 près.

Mais, dans l'évaluation de la pression, on ne peut oublier que $f'(\rho)$ est énorme, et que les variations minimes de ρ entraînent des variations finies de p. Ne pouvant rattacher les variations de p à celles de ρ, trop petites, on doit donc regarder p comme une fonction de x, y, z, t, indépendante des vitesses, et tirer p de l'intégration des équations à quatre fonctions u, v, w, p de x, y, z, t.

Si l'on a besoin de connaître les variations de ρ, on les obtiendra en divisant par $f'(\rho)$ les variations de p.

Cette marche dans les approximations successives peut même être la seule applicable à certains mouvements tumultueux des gaz, quelque compressibles qu'ils soient.

De même, dans le cas de la viscosité, du fait que la vitesse de dilatation cubique est extrêmement petite dans les liquides, nous n'avons aucune raison de conclure que la pression normale isotrope correspondante soit aussi très petite (et à la limite, nulle). Nous devons seulement en conclure que la dilatation cubique est mal déterminée par les vitesses, puisque θ est incomparablement plus petit que chacun des trois termes dont il est la somme; que par conséquent on a avec une très grande approximation

$$\theta = 0,$$

et qu'il faut regarder le terme $(\lambda\theta)$ comme une fonction de x, y, z, t que détermineront les équations dynamiques. Mais, sous cette forme, cette fonction ne se distingue plus en rien de la pression générale p, dans laquelle elle se fond.

Si l'on veut franchir la dernière étape, et remonter de la pression à la dilatation cubique, l'équation d'état à laquelle il faut recourir est l'équation complète qui donne la pression moyenne

$$p - \frac{1}{3}(N_1 + N_2 + N_3) = f(\rho) - (3\lambda + 2\mu)\theta = f(\rho) + (3\lambda + 2\mu)\frac{\partial\rho}{\partial t},$$

et nous ne savons actuellement rien sur l'ordre de grandeur relatif des deux termes; rien ne nous autorise encore à effacer le second.

Du point de vue mathématique on admet la rigueur de la relation

$$\theta = 0$$

qui constitue alors une *liaison*, dont on doit tenir compte en formant les équations du mouvement; la force qui correspond à cette liaison est précisément la pression isotrope traitée comme fonction de x, y, z, t.

La rigueur logique du raisonnement ne doit pas faire illusion au physicien, qui ne peut pas oublier que les liquides, ainsi traités comme incompressibles par les mathématiciens, sont pourtant dix fois plus compressibles que les solides, dont personne ne songe à négliger la compressibilité! C'est que l'absence totale de *rigidité* des liquides permet des mouvements d'étendue finie sans changement de densité dont le rôle naturel est très important; les mouvements sonores dans lesquels la compressibilité du liquide intervient forment une classe séparée. En comprenant dans quel ordre les approximations doivent être obtenues, nous allons plus avant que par la méthode strictement mathématique.

Pour les gaz, Stokes a cru pouvoir admettre que la viscosité de compression est négligeable par rapport à la viscosité de déformation pure, ou que $3\lambda + 2\mu$ est beaucoup plus petit que 2μ; il a donc posé, même pour les gaz,

$$3\lambda + 2\mu = 0;$$

c'est à cela que correspond l'idée vulgaire qu'on se fait du frottement, celle qu'on traduit inexactement en supposant qu'il se réduit à des forces tangentielles, mais dont l'expression correcte est la suivante : *le frottement correspond aux glissements;* aucun frottement ne prend naissance dans une dilatation isotrope, déformation qui n'est accompagnée d'aucun glissement.

26. Travail de la viscosité. — Fonction de dissipation. — Un parallélépipède élémentaire se déplace, tourne, et se déforme par suite du mouvement. Les centres des faces opposées, primitivement normales à x, subissent des déplacements

$$u\,dt, \quad v\,dt, \quad w\,dt$$

et

$$\left(u + \frac{\partial u}{\partial x}dx\right)dt, \quad \left(v + \frac{\partial v}{\partial x}dx\right)dt, \quad \left(w + \frac{\partial w}{\partial x}dx\right)dt.$$

Le travail des forces

$$-X_x\,dy\,dz, \quad -Y_x\,dy\,dz, \quad -Z_x\,dy\,dz$$

et

$$\left(X_x + \frac{\partial X_x}{\partial x} dx\right) dy\, dz, \quad \left(Y_x + \frac{\partial Y_x}{\partial x} dx\right) dy\, dz, \quad \left(Z_x + \frac{\partial Z_x}{\partial x} dx\right) dy\, dz$$

est égal à

$$\left(X_x \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial X_x}{\partial x} u + Y_x \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial Y_x}{\partial x} v + Z_x \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial Z_x}{\partial x} w\right) dx\, dy\, dz\, dt,$$

$+$ des termes négligeables d'ordre supérieur.

De même pour les autres faces.

Le travail total ainsi obtenu ne se retrouve pas entièrement en travail contre les forces extérieures, ou en énergie cinétique; ce qui reste, après qu'on a évalué ce travail mécanique au moyen des équations (I), c'est

$$\left.\begin{array}{l} X_x \dfrac{\partial u}{\partial x} + Y_x \dfrac{\partial v}{\partial x} + Z_x \dfrac{\partial w}{\partial x} \\ + X_y \dfrac{\partial u}{\partial y} + Y_y \dfrac{\partial v}{\partial y} + Z_y \dfrac{\partial w}{\partial y} \\ + X_z \dfrac{\partial u}{\partial z} + Y_z \dfrac{\partial v}{\partial z} + Z_z \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{array}\right\} dx\, dy\, dz\, dt = Q\, dx\, dy\, dz\, dt.$$

C'est, d'après le principe de l'équivalence, la quantité de chaleur créée dans l'élément de volume. Remplaçons les $X_x, \ldots, Z_z$, par leurs expressions (IV), il vient

$$\begin{aligned} Q = &- p\theta + \lambda\theta^2 \\ &+ \mu[2u_x'^2 + 2v_y'^2 + 2w_z'^2 + (w_y' + v_z')^2 + (u_z' + w_x')^2 + (v_x' + u_y')^2]. \end{aligned}$$

Le premier terme $-p\theta$ est dû à la compression $(-\theta)$); le second et le troisième représentent le travail de la viscosité, qui est perdu comme énergie proprement mécanique; leur ensemble a reçu de Lord Rayleigh le nom de *fonction de dissipation*.

Cette expression nous permet de préciser le sens de l'opinion vulgaire, que le frottement est résistant. Il consomme toujours du travail; la quantité de chaleur qu'il produit

$$\Phi = \lambda\theta^2 + \mu[2u_x'^2 + 2v_y'^2 + 2w_z'^2 + (w_y' + v_z')^2 + (u_z' + w_x')^2 + (v_x' + u_y')^2]$$

est toujours positive ou nulle, jamais négative. Pour qu'il en soit ainsi, il faut évidemment que μ soit positif, lorsque les glissements ne sont pas nuls; il faut aussi que $3\lambda + 2\mu$ soit positif ou nul, lorsque la dilatation est isotrope. Ces conditions suffisent, car on peut alors mettre la fonction sous forme d'une somme de 6 carrés

indépendants

$$\Phi = 2\mu \left\{ \left[u'_x + \left(\sqrt{\frac{3\lambda + 2\mu}{2\mu}} - 1 \right) \frac{\theta}{3} \right]^2 + \ldots + \frac{1}{2}(w'_y + v'_z)^2 + \ldots \right\}.$$

On aperçoit ainsi, sous un autre point de vue, le caractère limite de l'hypothèse de Stokes; $3\lambda + 2\mu$ peut à la rigueur être nul, jamais négatif.

La fonction Φ est homogène et du deuxième degré; on a

$$X_x = N_1 = -p + \frac{\partial \Phi}{\partial(u'_x)}, \qquad X_y = T_3 = \frac{\partial \Phi}{\partial(u'_y + v'_x)}$$

et

$$2\Phi = (N_1 + p) u'_x + \ldots + T_3(u'_y + v'_x).$$

On a aussi identiquement, en désignant par U, V, W d'autres vitesses, et par Ψ la fonction correspondante analogue à Φ,

$$U'_x \frac{\partial \Phi}{\partial u'_x} + \ldots + (U'_y + V'_x) \frac{\partial \Phi}{\partial(u'_y + v'_x)} = u'_x \frac{\partial \Psi}{\partial U'_x} + \ldots + (u'_y + v'_x) \frac{\partial \Psi}{\partial(U'_y + V'_x)}.$$

La fonction Φ peut être également exprimée au moyen des pressions obliques, car on a

$$u'_x = \frac{1}{2\mu} \left[N_1 + p - \frac{3\lambda}{3\lambda + 2\mu}(N + p) \right],$$

$$w'_y + v'_z = \frac{1}{\mu} T_1,$$

en posant $3N = N_1 + N_2 + N_3$.

Il vient alors

$$\Phi = \frac{1}{2\mu} \left\{ \left[N_1 + p + \left(\sqrt{\frac{2\mu}{3\lambda + 2\mu}} - 1 \right)(N + p) \right]^2 + \ldots + 2T_1^2 + \ldots \right\}.$$

On peut donner à la fonction de dissipation une forme qui fait apparaître les conditions à la paroi

$$\Phi = (\lambda + 2\mu)\theta^2 + 4\mu\omega^2 - 4\mu(v'_y w'_z - v'_z w'_y + \ldots),$$

en posant

$$2\omega_1 = w'_y - v'_z, \quad \ldots, \quad \omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2.$$

Un groupement convenable des termes transforme cette expression en

$$\Phi = (\lambda + 2\mu)\theta^2 + 4\mu\omega^2$$
$$+ 4\mu \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2 + v^2 + w^2}{4} - v\omega_3 + w\omega_2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} (\quad) + \frac{\partial}{\partial z} (\quad) \right].$$

En intégrant pour tout le liquide, on obtient

$$\begin{aligned}\iiint \Phi\, dx\, dy\, dz = & \iiint (\lambda + 2\mu)\theta^2\, dx\, dy\, dz \\ & + 4\mu \iiint \omega^2\, dx\, dy\, dz - \mu \iint \frac{\partial}{\partial \nu}(u^2 + v^2 + w^2)\, dS \\ & + 4\mu \iint [l(v\omega_3 - w\omega_2) + \ldots]\, dS,\end{aligned}$$

en désignant par $\nu(l, m, n)$ la direction de la normale à l'élément dS, vers l'intérieur du fluide.

Les intégrales superficielles sont nulles sur toutes les parois où la vitesse est nulle. La seconde des intégrales superficielles est nulle sur toutes les parois où la rotation est nulle, et plus généralement où la normale à la surface est dans le plan de la vitesse et de la rotation.

27. Équations générales du mouvement interne. — Nous pouvons maintenant écrire les équations générales du mouvement des fluides en portant les expressions des N, T (n° 24), dans les équations (I) du n° 17 :

$$\begin{aligned}-\frac{\partial p}{\partial x} + (\lambda + \mu)\frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu\, \Delta u + X_e &= \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right), \\ -\frac{\partial p}{\partial y} + (\lambda + \mu)\frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu\, \Delta v + Y_e &= \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right), \\ -\frac{\partial p}{\partial z} + (\lambda + \mu)\frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu\, \Delta w + Z_e &= \rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right),\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0,$$

$$p = f(\rho, T).$$

Pour les mouvements isothermes des gaz :

$$f(\rho, T) = A\rho;$$

pour les mouvements adiabatiques des gaz :

$$f(\rho, T) = B\rho^m.$$

En général, il reste à définir les variations de température, en tenant compte des échanges par conductibilité, obéissant aux lois de Fourier, et des productions de chaleur par le frottement lui-même. Mais, dans les conditions auxquelles s'appliquent nos équations, c'est-à dire quand les déformations sont lentes, la quantité de chaleur créée

par viscosité, fonction du deuxième degré des vitesses de déformation, est très petite, comme la chaleur échangée par conductibilité si les coefficients de conductibilité et de viscosité sont du même ordre de grandeur; il est alors légitime de la négliger dans l'équation calorimétrique. Cette relation d'ordre de grandeur est celle à laquelle on est conduit quand on attribue aux deux phénomènes la même origine, la diffusion du fluide en lui-même; elle est d'accord avec l'expérience pour les gaz; mais il n'en est pas de même pour les liquides, à en juger par le Tableau suivant, qui contient presque toutes les déterminations de conductibilité thermique de liquides, au voisinage de 10°, et les valeurs correspondantes de la viscosité, le tout en unités C.G.S. Degré centigrade :

	Conductibilité.	Viscosité.
Acide acétique........	0,000 472	0,0150
Alcool méthylique....	495	0,0073
» éthylique......	423	0,0150
» amylique......	328	0,0651
Sulfure de carbone...	343	0,0036
Chloroforme.........	288	0,0064
Éther................	303	0,0026
Glycérine............	637	21
Huile d'olive.........	0,000 395	0,3

Aucune corrélation n'apparaît entre les deux propriétés.

Dans ce Volume la température du fluide sera ordinairement supposée uniforme et invariable, soit que les variations soient naturellement négligeables, soit qu'on les rende telles par une disposition convenable de l'expérience.

[illegible] **Le mouvement permanent lent est déterminé.** — Considérons les mouvements lents, tels que tous les produits $uu'_x, \ldots, uw'_x, \ldots$ soient négligeables.

Soient u, v, w les composantes de la vitesse qui satisfont aux équations et aux conditions à la surface limite. Soient U, V, W des vitesses [illegible] arbitraires, nulles à la surface limite.

La fonction de dissipation pour le mouvement total est

$$[illegible] \; [\ldots (u + U)'^2_x + \ldots + (u'_y + v'_x + U'_y + V'_x)^2 + \ldots],$$

avec les notations et les remarques du n° **26**,

$$[illegible] \left[[illegible] \frac{\partial \Phi}{\partial u'_x} + \ldots + (U'_y + V'_x) \frac{\partial \Phi}{\partial (u'_y + v'_x)} + \ldots \right].$$

Cette dernière parenthèse est égale à

$$2\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(U\frac{\partial\Phi}{\partial u'_x}+V\frac{\partial\Phi}{\partial v'_x}+W\frac{\partial\Phi}{\partial w'_x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\quad\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\quad\right)\right]$$
$$-2\left[U\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial u'_x}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\Phi}{\partial u'_y}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\Phi}{\partial u'_z}\right)+V\left(\quad\right)+W\left(\quad\right)\right].$$

D'après les équations du mouvement lent, la seconde ligne est égale à

$$+2\left[U\left(X_e-\frac{\partial p}{\partial x}-\rho\frac{\partial u}{\partial t}\right)+\ldots\right].$$

Supposons que les forces extérieures dérivent d'un potentiel uniforme $\mathfrak{P}$ par unité de masse, comme la pesanteur,

$$X_e=-\rho\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial x},\ \ldots;$$

cette seconde ligne peut s'écrire

$$-2\left[\frac{\partial}{\partial x}U(\rho\mathfrak{P}+p)+\frac{\partial}{\partial y}V(\rho\mathfrak{P}+p)+\ldots\right.$$
$$\left.-(\rho\mathfrak{P}+p)\theta-\mathfrak{P}\left(U\frac{\partial\rho}{\partial x}+\ldots\right)+\rho\left(U\frac{\partial u}{\partial t}+\ldots\right)\right].$$

Cela étant, formons la fonction de dissipation pour tout le volume occupé par le liquide, en nous rappelant que U, V, W sont supposés nuls à la surface limite; il reste seulement

$$F+\delta F=\iiint\left[\Phi+\Psi+2(\rho\mathfrak{P}+p)\theta\right.$$
$$+2\mathfrak{P}\left(U\frac{\partial\rho}{\partial x}+V\frac{\partial\rho}{\partial y}+W\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)$$
$$\left.-2\rho\left(U\frac{\partial u}{\partial t}+V\frac{\partial v}{\partial t}+W\frac{\partial w}{\partial t}\right)\right]dx\,dy\,dz.$$

Dans les mouvements lents, les variations de densité sont faibles et l'équation de continuité se réduit à

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho\theta=0;$$

le mouvement additionnel est soumis à la même restriction, et les termes $\left(U\frac{\partial\rho}{\partial x}+\ldots\right)$ sont négligeables en facteur de $\mathfrak{P}$.

Considérons un mouvement permanent et un mouvement additionnel qui conserve la permanence

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial w}{\partial t}=0,\qquad \theta=0.$$

La fonction de dissipation se réduit à

$$F + \delta F = \int\int\int (\Phi + \Psi)\, dx\, dy\, dz.$$

Or Ψ est essentiellement positif. Donc, dans le mouvement modifié, avec mêmes vitesses à la surface et même distribution de densité, la dissipation d'énergie est plus grande que dans le mouvement permanent réel.

Cette proposition a été énoncée par Helmholtz (*Abh.*, t. I, 1868, p. 223) pour les liquides.

Sous vitesses données à la surface, le mouvement permanent est unique, puisqu'il correspond à la plus petite dissipation d'énergie.

Application. — Il est quelquefois très difficile d'intégrer les équations du mouvement permanent; mais on peut généralement se faire une idée grossière de la distribution des vitesses.

En particulier on peut imaginer des distributions de vitesses continues, mais avec discontinuités des dérivées des vitesses, telles que la fonction Φ soit partout finie, qui représentent l'allure générale du mouvement, et satisfassent exactement à la distribution des vitesses le long de la paroi, et sur toute la surface limite du liquide.

La fonction de dissipation calculée au moyen de cette distribution imaginée des vitesses est toujours trop grande; elle donne une valeur approchée par excès du travail, et par conséquent des forces appliquées aux parties mobiles de la surface limite. Lorsque la distribution a été imaginée judicieusement, l'excès peut n'être pas très grand; nous en verrons des exemples.

On peut utiliser pour le calcul l'expression transformée (26) mais en conservant les intégrales de surface le long de toutes les surfaces où les dérivées des vitesses imaginées sont discontinues.

29. Stabilité du mouvement permanent lent. — On a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial u'_x}\frac{\partial u'_x}{\partial t} + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial (u'_y + v'_x)}\frac{\partial}{\partial t}(u'_x + v'_y) + \ldots,$$

et par la même transformation que plus haut

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial \Phi}{\partial u'_x} + \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial \Phi}{\partial v'_x} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial \Phi}{\partial w'_x} - \frac{\partial u}{\partial t}(\mathfrak{P}\rho + p)\right]$$
$$+ \frac{\partial}{\partial y}\left[\cdots\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\cdots\right] + (\mathfrak{P}\rho + p)\frac{\partial \theta}{\partial t} - \rho\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right].$$

Or, dans le mouvement lent, on a

$$p = a + b\rho$$

avec

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\theta = 0;$$

d'où

$$(\mathfrak{P}\rho + p)\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}[(\mathfrak{P}\rho + p)\theta] + (\mathfrak{P} + b)\rho\theta^2.$$

Considérons seulement les mouvements variés dans lesquels la vitesse de la surface limite du fluide reste la même que dans l'état permanent. On a alors

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dF}{dt} = \displaystyle\int\int\int \frac{\partial \Phi}{\partial t}\, dx\, dy\, dz \\ \quad = \dfrac{\partial}{\partial t}\left[\displaystyle\int\int\int (\mathfrak{P}\rho + p)\theta\, dx\, dy\, dz\right] \\ \quad + \displaystyle\int\int\int \rho\left[\theta^2(\mathfrak{P} + b) - \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right]. \end{cases}$$

Supposons d'abord que le mouvement s'effectue sans variation de densité.

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\int\int\int \rho\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right] dx\, dy\, dz;$$

le second membre est essentiellement négatif; l'énergie dissipée par seconde diminue constamment; elle tend donc sans alternatives vers sa valeur minima. Le mouvement permanent lent est stable.

Cette propriété a été établie par Korteweg pour les liquides (*Phil. Mag.*, 1883).

Dans le cas des gaz, si l'état variable est accompagné de perturbations de la densité, celle-ci est déterminée séparément par

$$-\Delta p + (\lambda + 2\mu)\Delta\theta - \rho\,\Delta\mathfrak{P} = \rho\frac{\partial \theta}{\partial t},$$

$$p = a + b\rho, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\theta = 0$$

ou

$$b\,\Delta\rho + \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}\Delta\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\,\Delta\mathfrak{P} = \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2},$$

qui comporte des oscillations amorties; le retour à l'état permanent ne se fait pas nécessairement sans alternatives; mais l'état permanent n'en est pas moins stable.

En effet, le potentiel des forces extérieures $\mathfrak{P}$ contient une constante arbitraire, qu'on peut toujours prendre négative, assez grande

pour que $\mathfrak{P} + b$ soit négatif dans tout le volume occupé par le fluide.

L'équation (1) montre alors que

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(F - \int\int\int p\theta \, dx\, dy\, dz - \int\int\int \rho\mathfrak{P}\theta \, dx\, dy\, dz\right)$$

est constamment négatif. Les deux premiers termes représentent la chaleur dégagée dans tout le fluide, le troisième est l'accroissement d'énergie potentielle. La somme diminue constamment, et tend sans alternatives vers la valeur minima, correspondant au mouvement permanent; celui-ci est donc stable.

30. Propagation du son par ondes sphériques. — Appliquons immédiatement les équations générales à la propagation du son par ondes sphériques isotropes de faible amplitude. Soient P, ρ_0, T_0 la pression, la densité et la température d'équilibre; on a

$$-\frac{\partial P}{\partial x} + X_e = 0, \qquad \ldots$$

et, par suite,

$$-\frac{\partial}{\partial x}(p - P) + (\lambda + \mu)\frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu\,\Delta u = \rho_0 \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad \ldots$$

et

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \theta\rho_0 = 0,$$

en négligeant les termes du second ordre, avec

$$\frac{p - P}{P} = \frac{(\rho - \rho_0)}{\rho_0} + \frac{T - T_0}{T_0}$$

comme conséquence de la loi de Mariotte.

Enfin l'équation calorimétrique est exactement

$$K\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) - P\theta + \lambda\theta^2 + \mu[2u_x'^2 + \ldots + (w_y' + v_z')^2 + \ldots] = c\rho_0 \frac{\partial T}{\partial t},$$

en appelant K la conductibilité, et c la chaleur spécifique sous volume constant.

Pour des ondes sphériques isotropes émanant de l'origine, la vitesse, purement radiale, ne dépend que de la distance r à l'origine, et de t, ce qui permet de poser

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \qquad [\varphi(r, t)],$$

$$\theta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \Delta\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r}$$

et donne aux équations la forme

$$\frac{-\partial(p-P)}{\partial r}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial}{\partial r}\Delta\varphi=\rho_0\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial\varphi}{\partial t},$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\theta\rho_0=0,$$

$$K\,\Delta T-P\,\Delta\varphi+\lambda(\Delta\varphi)^2+\mu\left[2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)^2+\ldots+4\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial z}\right)^2+\ldots\right]=c\rho_0\frac{\partial T}{\partial t}.$$

Si, dans cette dernière équation, nous négligeons la conductibilité et la viscosité, la compression est adiabatique

$$\frac{p-P}{P}=\gamma\frac{\rho-\rho_0}{\rho_0}\qquad(\gamma \text{ rapport des deux chaleurs spécifiques}).$$

Dérivant la première équation par rapport à t et éliminant p et ρ, au moyen de l'équation de continuité et de l'équation adiabatique, enfin intégrant par rapport à r, on trouve facilement

$$\frac{P\gamma}{\rho_0}\Delta\varphi+\frac{\lambda+2\mu}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial t}\Delta\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2};$$

et en multipliant par r,

$$\frac{P\gamma}{\rho_0}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\varphi)+\frac{\lambda+2\mu}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\varphi)=\frac{\partial^2}{\partial t^2}(r\varphi).$$

Une *source* périodique simple à l'origine donnera un mouvement représenté par

$$\varphi=A\frac{e^{-\zeta r}\cos(nt-mr)}{r}$$

avec

$$\frac{P\gamma}{\rho_0}(\zeta^2-m^2)-\frac{\lambda+2\mu}{\rho_0}n.2\zeta m+n^2=0,$$

$$\frac{\lambda+2\mu}{\rho_0}n(\zeta^2-m^2)+\frac{P\gamma}{\rho_0}2\zeta m=0;$$

d'où, en première approximation $\left(\frac{\zeta}{m}\text{ petit}\right)$,

$$\frac{P\gamma}{\rho_0}m^2=n^2\qquad\text{ou}\qquad\frac{n}{m}=\sqrt{\frac{P\gamma}{\rho_0}},$$

et

$$\frac{2P\gamma}{\rho_0}\zeta=\frac{\lambda+2\mu}{\rho_0}nm\qquad\text{ou}\qquad\zeta=\frac{\lambda+2\mu}{2\rho_0}\frac{m^3}{n}.$$

L'intensité du son varie comme le carré de l'amplitude, c'est-à-dire comme $\frac{e^{-2\zeta r}}{r^2}$; aux distances supérieures à $\frac{1}{\zeta}$, l'extinction par viscosité $e^{-2\zeta r}$ devient plus importante que l'affaiblissement par rayonnement $\left(\frac{1}{r^2}\right)$.

Mettons des nombres; on a pour l'air à 0°, en C.G.S.,

$$\frac{n}{m} = 33300; \qquad \rho_0 = 0,001293; \qquad \mu = 0,0002; \qquad m = \frac{2\pi}{L},$$

en appelant L la longueur d'onde du son.

D'où

$$\zeta = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{2\mu}\right) \frac{0,0004}{0,0013} \frac{1}{33300} \frac{4\pi^2}{L^2}$$
$$= \left(\frac{\lambda + 2\mu}{2\mu}\right) \frac{1,9.10^{-4}}{L^2}.$$

Si donc λ était nul, on aurait, pour un son moyen ($L = 100^{cm}$),

$$\frac{1}{\zeta} = \frac{10^8}{1,9} \qquad \text{soit} \qquad 500^{km}.$$

Avec la relation de Stokes $\lambda + 2\mu$ devient égal à $\frac{2}{3} 2\mu$, et $\frac{1}{\zeta}$ devient 1,5 fois plus grand.

Il ne semble pas que l'observation vulgaire, ou même les remarques faites au cours d'observations scientifiques, permettent de dire si l'affaiblissement par viscosité joue un rôle important dans la propagation sphérique, et si le coefficient $\lambda + 2\mu$ est beaucoup plus grand ou beaucoup plus petit que 2μ, puisque le domaine du rayonnement presque pur $\left(\text{loi } \frac{1}{r^2}\right)$ est de plusieurs dizaines de kilomètres, pour les sons moyens, moindre pour les sons très aigus.

En tous cas, ce n'est pas sur la combinaison de Stokes $(3\lambda + 2\mu)$ qu'on serait renseigné, mais sur la combinaison $\lambda + 2\mu$ qui seule intervient dans la propagation libre du son.

Des expériences précises paraissent indispensables.

B. — CONDITIONS A LA PAROI.

31. Conditions exprimant que la paroi est étanche. — Si la paroi est étanche, ce que nous supposerons, la vitesse relative du liquide et

de la paroi ne peut être que tangentielle; la vitesse normale relative est nulle.

Soit donc en un point de la paroi : U, V, W les composantes de la vitesse de celle-ci; u, v, w les composantes de la vitesse du liquide; α, β, γ les cosinus directeurs de la normale. On a

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = \alpha U + \beta V + \gamma W. \tag{1}$$

32. Conditions relatives au frottement à la paroi. — Deux cas peuvent se présenter :

Premier cas. — *Il y a adhérence complète.* C'est évidemment le cas des liquides qui mouillent. Alors la vitesse du fluide est égale à celle de la paroi et l'on a

$$u = U, \qquad v = V, \qquad w = W.$$

Deuxième cas. — *Il y a glissement partiel du liquide sur la paroi.* — Alors, pour un liquide et une paroi donnés, nous admettrons qu'il existe un frottement proportionnel à leur vitesse relative et ayant même direction.

Appelons $\mathfrak{v}$ cette vitesse relative en un point de la paroi. Prenons ce point pour origine des coordonnées, pour axe des x la direction de la vitesse $\mathfrak{v}$, et des z la normale vers l'intérieur du liquide.

La force de frottement exercée en ce point par le solide sur le liquide est dirigée en sens inverse de la vitesse relative $\mathfrak{v}$ du liquide.

Sa valeur par unité de surface peut donc s'exprimer par

$$-k\mathfrak{v}$$

en désignant par k une constante spécifique. Le travail de frottement, superficiel, perdu comme travail et converti en chaleur, est, par unité de surface et par seconde, $k\mathfrak{v}^2$.

Considérons alors une lame très mince de liquide contiguë à la paroi et d'étendue dS.

La force de frottement exercée sur la face externe de cette lame est

$$-k\mathfrak{v}\,dS.$$

La force exercée sur la face interne de cette lame par le reste du liquide est

$$T_1\,dS.$$

Toutes les autres forces étant proportionnelles au volume, on doit

avoir séparément

$$(-k\mathfrak{V} + T_1)\,dS = 0$$

ou

$$T_1 = k\mathfrak{V}. \tag{1}$$

La vitesse relative normale $\mathfrak{P}$ est nulle tout le long de la surface; on a donc

$$\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial x} = 0, \qquad T_1 = \mu\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial z}.$$

Cherchons à quelle distance de la paroi la vitesse relative tangentielle serait nulle; en supposant la variation de vitesse linéaire dans le voisinage de la paroi, on a

$$u = \mathfrak{V} + z\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial z},$$

et l'équation (1) donne

$$\mu\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial z} = k\mathfrak{V}$$

d'où

$$u = \mathfrak{V}\left(1 + z\frac{k}{\mu}\right).$$

La vitesse u deviendrait donc nulle à la profondeur $-\frac{\mu}{k}$, située dans la paroi si k est positif, c'est-à-dire si le frottement à la paroi est résistant, et dissipe réellement du travail sous forme de chaleur.

Donc : la vitesse le long de la paroi est la même que s'il y avait adhérence sur une paroi parallèle à la paroi donnée, et située à une distance $\varepsilon = \frac{\mu}{k}$ hors du liquide.

L'expérience permet-elle de mettre en évidence cette valeur $\frac{\mu}{k}$ de la distance du plan d'adhérence à la paroi? Si l'on arrive à des valeurs de $\frac{\mu}{k}$ plus petites que l'erreur qu'on peut commettre sur le repérage précis de la position de la paroi, il est bien clair que cette valeur de $\frac{\mu}{k}$ est illusoire; on n'aura pas à en tenir compte. C'est le cas de l'expérience des disques (Coulomb). Ce n'est guère que dans le cas de l'écoulement à travers des tubes capillaires qu'on peut obtenir une valeur de $\frac{\mu}{k}$ certainement supérieure aux erreurs d'expériences.

Les formules de transformation de coordonnées permettraient d'écrire l'équation de frottement superficiel pour une orientation quelconque de la paroi mobile; mais l'extrême petitesse de l'épaisseur

additionnelle z dans tous les cas connus permet de se borner sans erreur appréciable au cas plus simple de l'immobilité relative le long d'une paroi fictive parallèle à la paroi vraie à une profondeur $-\frac{\mu}{k}$.

33. **Limites d'adhésion.** — Telles sont les seules suppositions précises faites jusqu'à présent au sujet des relations de contact entre le liquide et le solide. Il y a pourtant une autre question importante qui se pose d'elle-même dans l'emploi des huiles comme lubréfiants, celle des conditions qui limitent l'adhésion du liquide au solide. En horlogerie la réponse est simple, et ressort exclusivement de la capillarité (1); mais, dans la grosse mécanique, il en est tout autrement, et l'on parle de lubréfiants qui ont du *corps* et des *pressions limites qui chassent le lubréfiant* pour caractériser une propriété essentielle qui semble être distincte de la viscosité comme la ténacité est distincte de l'élasticité. Toutefois les indications des ingénieurs à ce sujet restent si confuses que la propriété spécifique est encore inconnue.

Il est certain que le liquide peut cesser d'être en contact avec la paroi, et s'en séparer en la laissant sèche. Une goutte de mercure par exemple peut rouler sur du verre; la séparation s'effectue alors normalement. Il n'est pas sûr qu'elle puisse glisser; pourtant il est peu vraisemblable que le frottement sans glissement puisse croître sans limites.

A défaut d'observations, quelles hypothèses provisoires peut-on faire à ce sujet?

1° Le frottement avec adhérence est remplacé par le frottement avec glissement au delà d'une certaine valeur fixe :

$$\left.\begin{array}{ll} \mu\dfrac{\partial u}{\partial n} < f_0, & u = 0 \\ \mu\dfrac{\partial u}{\partial n} > f_0, & \mu\dfrac{\partial u}{\partial n} = f_0 + f_1 u \end{array}\right\} \text{ à la paroi,}$$

u désignant la vitesse relative, tangente à la paroi.

2° Même loi, mais la limite f_0 est proportionnelle à la composante normale de la pression :

$$f_0 = \varphi_0\left(p + \mu\frac{\partial v}{\partial n}\right),$$

v désignant la vitesse relative normale à la paroi.

(1) M. Brillouin, *A. Ch. Ph.*, 1906.

L'épaisseur additionnelle ε (n° 32) n'est plus une constante; la profondeur ε à laquelle on peut imaginer une paroi fictive sans glissement est alors égale à $\frac{\mu u_0}{f_0 + f_1 u_0}$, extrêmement grande au début du glissement (u_0 petit) si f_0 n'est pas nul. Le glissement se produirait d'abord aux points où la variation $\frac{\partial u}{\partial n}$ est la plus grande, c'est-à-dire aux courbures d'entrée et de sortie, et aux angles vifs de la paroi. Les changements de régime seraient alors sous la dépendance étroite des orifices (L. II, Ch. IV).

Dans tous les cas, la pression normale est celle que donne l'intégration des équations du mouvement interne.

34. **Surface libre.** — Lorsqu'il y a une surface libre, on admet d'ordinaire avec Stokes que le frottement est nul à la surface (en négligeant l'entraînement du gaz par adhérence) et que les équations de viscosité sont valables jusqu'à la surface. Toutefois on oublie généralement de les écrire et d'en discuter l'influence.

Si l'axe des x est normal à la surface, ces équations sont

$$-p + \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} = -p_{ext},$$
$$\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0,$$
$$\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = 0.$$

35. **Viscosité superficielle.** — A la suite d'observations d'ailleurs discutables, sur les bulles de savon, Plateau a été conduit à supposer l'existence possible d'une viscosité beaucoup plus grande de la couche superficielle que de l'intérieur du liquide. Cette propriété peut être une conséquence naturelle de l'existence des couches de passage que révèle la tension superficielle.

Traduisons-la en formules, en supposant que les actions sont des fonctions linéaires de la vitesse de déformation de l'élément de surface : si l'élément de surface $dy\,dz$ fait partie de la surface libre, les forces qui s'exercent sur les éléments $dx\,dy$, $dx\,dz$ contiennent des termes proportionnels aux longueurs des côtés dy, dz, auxquels les conditions d'isotropie autour de la normale ox imposent la forme

$$dx\,dz: \quad \lambda_s\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2\mu_s\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \mu_s\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right),$$
$$dx\,dy: \quad \mu_s\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right), \qquad \lambda_s\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2\mu_s\frac{\partial w}{\partial z}.$$

Les composantes normales à la surface sont nulles, car leur couple autour de oy et autour de oz doit être nul séparément.

A ces forces correspond une conversion de travail mécanique en chaleur proportionnelle à l'aire, définie par la fonction de dissipation superficielle

$$\Phi_s = \lambda_s(v'_y + w'_z)^2 + \mu_s[2v'^2_y + 2w'^2_z + (w'_y + v'_z)^2].$$

Comme il n'y a pratiquement pas de terme d'inertie proportionnel à la surface, la variation de densité étant au-dessous de tout ce qu'on a pu mesurer, l'effet de ces forces superficielles doit équilibrer les actions qui proviennent de la profondeur sur l'élément de surface $dx\,dy$:

$$-p + \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} = -p_{ext};$$

si la surface est courbe, on ajoutera le terme dû à la capillarité.

$$\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + (\lambda_s + \mu_s)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \mu_s\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) = 0,$$

$$\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) + (\lambda_s + \mu_s)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \mu_s\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) = 0.$$

Ces équations sont notablement plus compliquées que les précédentes (n° 34).

S'il y a une couche de passage ayant sa viscosité propre à la surface libre, *a fortiori* doit-il y en avoir une au contact d'un solide; mais elle ne peut entrer en jeu que s'il y a glissement relatif; les équations à la surface d'un solide isotrope seraient alors

$$\mu\frac{\partial v}{\partial x} + (\lambda'_s + \mu'_s)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \mu'_s\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) = f_0 + f_1 v,$$

$$\mu\frac{\partial w}{\partial x} + (\lambda'_s + \mu'_s)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \mu'_s\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) = 0,$$

en désignant par 0, v, w, la vitesse relative du liquide par rapport à la paroi et prenant l'axe Oy suivant la vitesse v, positive, au centre de l'élément de surface dx, dy, où l'on suppose w nul.

La condition d'absence de glissement serait alors

$$\mu\frac{\partial v}{\partial x} + (\lambda'_s + \mu'_s)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \mu'_s\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \leqq f_0.$$

36. Rigidité du liquide. — Quant au *corps* du lubréfiant, il semble

que cette propriété doit se rattacher à la rigidité étudiée par Schwedoff [1], et ne pas appartenir aux vrais liquides.

La pression limite qui chasse le lubréfiant ne s'exerce jamais sur une couche épaisse; mais, dans le cas où les parois ont acquis le poli spéculaire, et où les surfaces sont bien parallèles, la couche peut devenir très mince, et c'est alors la question de la stabilité des couches très minces, immobiles ou en mouvement, qu'on doit se poser.

Mettons hors de cause la capillarité qui ne peut jouer aucun rôle quand il s'agit de la grosse mécanique, et de tourillons qui portent des centaines de kilogrammes. Le lubréfiant est soumis à deux actions rectangulaires : la pression qui tend à le chasser parallèlement à l'axe de rotation, à travers l'espace annulaire, et le couple de rotation qui le fait circuler autour du tourillon. Dans ce dernier mouvement, la déformation considérable et constamment croissante ne met en jeu d'une manière appréciable que la viscosité; mais, si le lubréfiant est une de ces huiles analogues aux solutions de gélatine, telles que l'huile d'olive, l'huile de ricin, il est capable de supporter des efforts sans se rompre, pourvu que la déformation correspondante reste petite: c'est ce qui arrive dans la direction de l'axe. Le même lubréfiant peut se comporter au même moment comme fluide dans le sens des grandes déformations, et comme rigide dans un sens perpendiculaire, si l'on a soin de limiter les efforts et les déformations dans ce sens.

Je reviendrai sur ce point dans le dernier Chapitre de ce Volume.

---

(1) *Congrès de Physique*, t. I, 1900, p. 478.

CHAPITRE III.

PROBLÈMES THÉORIQUES.
MOUVEMENT RECTILIGNE A UNE DIMENSION.

I. — ENTRAINEMENT DU LIQUIDE PAR LE GLISSEMENT D'UN PLAN.

37. **Mouvement rectiligne**. — Le problème le plus simple est celui du mouvement rectiligne de vitesse U d'un plan indéfini en tous sens ($z = 0$) avec diverses conditions au loin, également uniformes dans un plan $z = h$, parallèle au plan mobile.

La vitesse u ne dépend alors que de la coordonnée z normale au plan et du temps; $\frac{\partial u}{\partial x}$ est nul; v et w sont nulles. Les équations sont alors *rigoureusement*

$$(1) \qquad -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \rho \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad -\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \qquad -\frac{\partial p}{\partial z} = 0.$$

Pour les liquides, nous pouvons supposer la pression p constante ou linéaire en x; mais, pour les gaz, notre hypothèse a pour conséquence l'uniformité de la densité, et, par conséquent, de la pression. Traitons donc d'abord ce premier cas.

$$(I) \qquad \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

L'équation en u est identique à l'équation de diffusion de la chaleur; les solutions fournies par Fourier et ses successeurs s'y adaptent immédiatement.

38. **Mouvement permanent** $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$. — Liquide adhérent

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \qquad u = U - az.$$

Résistance par unité de surface $T_2 = -\mu a$. — La vitesse varie linéai-

rement avec la distance au plan mobile; comme on ne peut admettre qu'elle devienne infinie au loin, le seul mouvement que puisse prendre le liquide indéfiniment étendu, sous un plan indéfini, est le mouvement de translation avec la même vitesse que le plan, comme s'il faisait corps avec lui, et sans résistance ($a = 0$).

La condition à distance infinie n'est pas disponible; on ne peut pas, en particulier, supposer le liquide immobile à l'infini lorsque le mouvement est permanent.

C'est d'ailleurs une circonstance dont on ne peut s'étonner, vu l'extension infinie du plan mobile et le temps infini nécessaire à l'établissement de l'état permanent.

La substitution de la condition de glissement à l'adhérence ne changerait rien; il faut toujours que a soit nul, donc le frottement nul, et nulle aussi la différence entre la vitesse du liquide et celle du plan au contact.

Couche d'épaisseur h; fond immobile. — Adhérence :

$$u = \mathrm{U}\left(1 - \frac{z}{h}\right), \qquad \mathrm{T}_2 = -\mu \frac{\mathrm{U}}{h}.$$

Glissements avec coefficients f_0, f_1 sur les deux plans

$$u = \mathrm{U}\,\frac{\dfrac{\mu}{f_1} + h - z}{\dfrac{\mu}{f_1} + h + \dfrac{\mu}{f_0}}, \qquad \mathrm{T}_2 = -\mu\,\frac{\mathrm{U}}{\dfrac{\mu}{f_1} + h + \dfrac{\mu}{f_0}}.$$

39. Mouvement varié, exponentiel amorti $\mathrm{U} = \mathrm{A}e^{-\theta t}$. — Adhérence :

$$u = e^{-\theta t}\left(\mathrm{A}\cos z\sqrt{\frac{\rho\theta}{\mu}} + \mathrm{B}\sin z\sqrt{\frac{\rho\theta}{\mu}}\right),$$

$$\mathrm{T}_2 = e^{-\theta t}\sqrt{\mu\rho\theta}\left(-\mathrm{A}\sin z\sqrt{\frac{\rho\theta}{\mu}} + \mathrm{B}\cos z\sqrt{\frac{\rho\theta}{\mu}}\right).$$

Le liquide se subdivise en couches périodiques stationnaires sans amortissement en profondeur, d'épaisseur $\pi\sqrt{\frac{\mu}{\rho\theta}}$ alternativement progressives et régressives, dont la position dépend de la constante arbitraire B.

Dans ce nouveau mouvement, la singularité relative au liquide indéfini est nouvelle : la constante B reste complètement indéterminée en grandeur et en signe.

S'il y a un plan fixe à profondeur h avec adhérence, on a

$$A \cos h \sqrt{\frac{\rho\theta}{\mu}} + B \sin h \sqrt{\frac{\rho\theta}{\mu}} = 0,$$

d'où

$$B = -A \operatorname{cotang} h \sqrt{\frac{\rho\theta}{\mu}}.$$

B peut donc prendre toutes les valeurs comprises entre $\pm\infty$.

B est nul lorsque l'épaisseur h comprend un nombre impair de quarts de longueurs d'onde

$$h = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi\sqrt{\frac{\mu}{\rho\theta}} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Le frottement est alors nul sur le plan mobile; mais, sur le plan fixe, il est égal à

$$e^{-\theta t}\sqrt{\mu\rho\theta}\, A \sin\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi,$$

entraînant ce plan dans le sens du mouvement du plan mobile, ou *en sens opposé,* suivant que k est pair ou *impair.*

B est infini lorsque l'épaisseur h comprend un nombre entier de demi-longueurs d'onde

$$h = k\pi\sqrt{\frac{\mu}{\rho\theta}} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Le frottement est alors infini sur le plan mobile et sur le plan fixe, mais son signe est indéterminé.

Pour les épaisseurs intermédiaires, B est fini différent de zéro.

$$B < 0 \qquad k\pi\sqrt{\frac{\mu}{\rho\theta}} < h < \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi\sqrt{\frac{\mu}{\rho\theta}},$$

$$B > 0 \qquad \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi\sqrt{\frac{\mu}{\rho\theta}} < h < (k+1)\pi\sqrt{\frac{\mu}{\rho\theta}}.$$

Sur le plan mobile, le frottement $Be^{-\theta t}\sqrt{\mu\rho\theta}$ est *accélérateur* si B est positif, retardateur dans le cas contraire. Sur le plan fixe, le frottement $+ Ae^{-\theta t}\sqrt{\mu\rho\theta} : \sin h\sqrt{\frac{\rho\theta}{\mu}}$ n'est jamais nul; il a une valeur absolue minimum $Ae^{-\theta t}\sqrt{\mu\rho\theta}$; mais il est accélérateur lorsque le sinus est positif,

$$2k\pi\sqrt{\frac{\mu}{\rho\theta}} < h < (2k+1)\pi\sqrt{\frac{\mu}{\rho\theta}},$$

ou *retardateur* dans le cas contraire,

$$(2k+1)\pi\sqrt{\frac{\mu}{\rho\theta}} < h < (2k+2)\pi\sqrt{\frac{\mu}{\rho\theta}}.$$

Les frottements accélérateurs sur le plan mobile, retardateurs sur le plan fixe, pour des épaisseurs d'ailleurs différentes, mais en nombre infini, sont tout l'opposé de ce qu'on appelle d'ordinaire *des frottements*.

L'origine de ces résultats d'apparence paradoxale est facile à trouver, dans ce fait que le mouvement exponentiel a eu une amplitude infinie à une époque infiniment reculée dans le passé, et que le taux d'amortissement spontané du mouvement initial peut différer, en plus ou *en moins*, du taux d'amortissement imposé par le mouvement du plan mobile, et cela inégalement aux diverses profondeurs : d'où toutes sortes de variétés de cheminement de l'énergie et des échanges avec les parois.

Pour chaque épaisseur h, en modifiant le liquide de manière à changer μ, on passera périodiquement par les mêmes alternatives, puisque tout dépend de $h\sqrt{\frac{\rho\theta}{\mu}}$; en particulier, un accroissement de la viscosité peut donner naissance à un frottement accélérateur croissant; ou, inversement, une diminution de la viscosité peut produire un accroissement considérable de la résistance.

Ces phénomènes, aussi singuliers que certains, n'ont fait l'objet d'aucune étude expérimentale; mais il me paraît possible que certaines instabilités observées, et peut-être aussi la production du régime hydraulique doivent y être rattachées; il faut remarquer en particulier l'indétermination du signe du frottement (accélérateur ou résistant) quand il devient infini, tel que la variation de viscosité due à la chaleur même que produit le frottement suffise à provoquer le changement de signe.

40. Mouvement exponentiel croissant $U = Ae^{\theta t}$. — La solution est d'un caractère tout différent

$$u = e^{\theta t}\left(A \operatorname{Ch} z\sqrt{\frac{\rho\theta}{\mu}} + B \operatorname{Sh} z\sqrt{\frac{\rho\theta}{\mu}}\right),$$

$$T_1 = e^{\theta t}\sqrt{\mu\rho\theta}\left(A \operatorname{Sh} z\sqrt{\frac{\rho\theta}{\mu}} + B \operatorname{Ch} z\sqrt{\frac{\rho\theta}{\mu}}\right),$$

en désignant par Ch, Sh les cosinus et sinus hyperboliques.

Il y a une solution déterminée $B = -A$ pour le cas où le liquide est en repos à distance infinie du plan mobile du côté positif; le frottement sur le plan mobile est toujours retardateur $-Ae^{\theta t}\sqrt{\mu\rho\theta}$.

S'il y a un plan fixe à distance h avec adhérence, on a

$$B = -A\,\mathrm{Cth}\left(h\sqrt{\frac{\rho\theta}{\mu}}\right).$$

B est toujours de signe contraire à A, et d'autant plus grand que l'épaisseur h est plus petite; le frottement sur le plan mobile, toujours retardateur $Be^{\theta t}\sqrt{\mu\rho\theta}$, est d'autant plus grand que l'épaisseur est moindre. Le frottement sur le plan fixe toujours accélérateur

$$+Ae^{\theta t}\sqrt{\mu\rho\theta} : \mathrm{Sh}\left(h\sqrt{\frac{\rho\theta}{\mu}}\right)$$

varie dans le même sens.

41. Mouvement varié, périodique simple : $U = A\sin\theta t$. — Posons

$$\tau = \sqrt{\frac{\theta\rho}{2\mu}},$$

l'intégrale est

$$u = \frac{A}{\sin(\psi-\varphi)}\left[\sin\psi e^{-\tau z}\sin(\theta t - \tau z + \varphi) - \sin\varphi e^{\tau z}\sin(\theta t + \tau z + \psi)\right],$$

$$T_2 = \frac{\mu\tau A\sqrt{2}}{\sin(\psi-\varphi)}\left[-\sin\psi e^{-\tau z}\sin\left(\theta t - \tau z + \varphi + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\varphi e^{\tau z}\sin\left(\theta t + \tau z + \psi + \frac{\pi}{4}\right)\right].$$

Il y a une solution déterminée $\varphi = 0$ pour le cas où le liquide est en repos à distance infinie du côté positif du plan mobile; le frottement sur le plan mobile $T_2 = -A\mu\tau\sqrt{2}\sin\left(\theta t + \frac{\pi}{4}\right)$ n'a pas la même phase que la vitesse; il est retardateur pendant $\frac{3}{4}$ de la demi-période $\left(\text{de } 0 \text{ à } \frac{3\pi}{4\theta}\right)$ et accélérateur pendant le dernier quart $\left(\text{de } \frac{3}{4}\frac{\pi}{\theta} \text{ à } \frac{\pi}{\theta}\right)$. Son action moyenne par période est retardatrice.

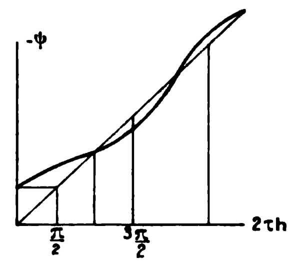
S'il y a un plan fixe à distance h avec adhérence, on a

$$\mathrm{tang}\,\psi = \frac{\sin 2\tau h}{e^{-2\tau h} - \cos 2\tau h}, \qquad \varphi = \psi + 2\tau h;$$

ψ décroît (*fig.* 4) depuis $-\left(\frac{\pi}{2} + \tau h\right)$ pour les petites valeurs de h,

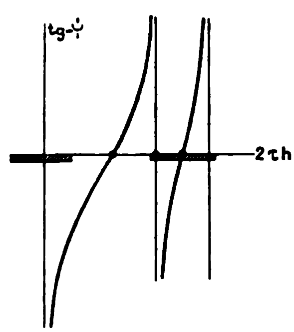
jusqu'à $-2\tau h$ pour les grandes valeurs de h; car les zéros de tangψ sont les mêmes que ceux de $\sin 2\tau h$, à l'exception du premier ($h=0$) qui est remplacé par un infini (*fig.* 5); les zéros du dénominateur

Fig. 4.



correspondent tous à des valeurs positives de $\cos 2\tau h$, décroissantes depuis $+1$ pour le premier, ($h=0$) jusqu'à 0 pour les grandes valeurs de h; c'est l'asymptote $2\tau h = \frac{\pi}{2}$ qui est reportée à l'origine par la présence de l'exponentielle.

Fig. 5.



φ varie en même temps de $-\left(\frac{\pi}{2} - \tau h\right)$ à 0.

Posant

$$\zeta = \psi + \tau h = \varphi - \tau h,$$

l'équation peut encore s'écrire

$$\text{tang}\,\zeta = -\frac{\text{tang}\,\tau h}{\text{Tgh}\,\tau h};$$

ζ varie de $-\frac{\pi}{2}$ à $-\tau h$.

La vitesse u est distribuée à chaque instant en couches alternatives

de sens opposé, dont l'épaisseur est à peu près la même

$$u = -\frac{A\sqrt{2}\,[\sin\tau y\,\mathrm{Ch}(\tau y)\cos(\theta t+\zeta)+\cos\tau y\,\mathrm{Sh}(\tau y)\sin(\theta t+\zeta)]}{\sqrt{\mathrm{Ch}(2\tau h)-\cos(2\tau h)}},$$

en comptant les distances y à partir du plan fixe :

$$y = h - z.$$

A chaque époque t, les couches de vitesse nulle, autres que le fond, occupent une position différente; résultat évident de ce que le plan mobile devient un plan de vitesse nulle à toutes les demi-périodes; il y a donc dans son voisinage un plan de vitesse nulle qui est situé au delà du plan mobile pendant une demi-période, et qui rentre dans le liquide pendant la demi-période suivante.

Les autres plans de vitesse nulle éprouvent un balancement analogue, dont l'amplitude est d'autant moindre qu'ils sont plus près du fond.

Le frottement sur le plan fixe est

$$T_2 = \frac{-\mu A\tau 2\sin\left(\theta t+\zeta+\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\mathrm{Ch}(2\tau h)-\cos(2\tau h)}}$$

et sur le plan mobile

$$\begin{aligned}T'_2 &= \mu A\tau\sqrt{2}\sin\zeta\left[\sin\left(\theta t+\zeta+\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{Tgh}(\tau h)\cos\left(\theta t+\zeta+\frac{\pi}{4}\right)\right]\\ &= \frac{-2\mu A\tau\sin\tau h\,\mathrm{Ch}\tau h}{\sqrt{\mathrm{Ch}(2\tau h)-\cos(2\tau h)}}\left[\sin\left(\theta t+\zeta+\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{Tgh}(\tau h)\cos\left(\theta t+\zeta+\frac{\pi}{4}\right)\right].\end{aligned}$$

Ces frottements n'ont ni même amplitude, ni même phase, en général.

Sur le plan mobile, cette amplitude

$$-2\mu A\tau\sin\tau h\sqrt{\frac{\mathrm{Ch}\,2\tau h}{\mathrm{Ch}(2\tau h)-\cos 2\tau h}}$$

est toujours finie, mais elle change de signe périodiquement avec τh, et la présence du facteur $\sin\tau h$ suffit pour montrer qu'il peut arriver qu'une augmentation de l'épaisseur h ou une diminution de la viscosité μ (dans τ) augmente l'amplitude du frottement pour une période donnée.

42. Mise en train du mouvement.

$u = 0$ dans le liquide indéfini $(t \leqq 0)$,

$u = A$ à la surface $z = 0$ $(t < 0)$.

La solution connue de Fourier est

$$u = A\left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{z}{2}\sqrt{\frac{\rho}{\mu t}}} e^{-\xi^2}\,d\xi\right).$$

La discontinuité à l'origine disparaît instantanément; le mouvement se fait sentir à toute profondeur mais très peu d'abord au loin; toute la courbe de distribution de u est définie en fonction de la seule variable $\frac{z^2\rho}{2\mu t}$, ce qui montre que la profondeur à laquelle on trouve une vitesse déterminée croît comme la racine carrée du temps; la propagation se ralentit constamment à mesure que l'état devient plus uniforme.

Les phénomènes qui accompagnent cette mise en train, avec une profondeur illimitée ou limitée, ont fait l'objet d'études approfondies de Lord Kelvin et des télégraphistes en général, à propos de la propagation de l'électricité dans les câbles ([1]).

II. — ÉCOULEMENT ENTRE PAROIS IMMOBILES.

Examinons maintenant le cas où $\frac{\partial p}{\partial x}$ est différent de zéro, fonction du temps seul. C'est le problème de l'écoulement du liquide entre parois parallèles, que nous prendrons fixes, à distance $\pm h$ de part et d'autre du plan origine des z.

43. Mouvement permanent sans glissement.

$$\mu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial p}{\partial x}, \qquad u = 0, \qquad z = \pm h,$$

$$u = +\frac{(z^2 - h^2)}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}.$$

Par unité de surface le frottement est sur chaque plan $h\frac{\partial p}{\partial x}$. Le

([1]) *Voir*, par exemple, BRILLOUIN, *Propagation de l'Electricité*, Hermann, 1904, p. 117-146, où l'on trouvera des références aux principaux Mémoires.

débit total par unité de largeur y est

$$I = \int_{-h}^{+h} u\,dz = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\frac{2h^3}{3};$$

ce débit est proportionnel à la chute de pression par unité de longueur, au cube de l'épaisseur $2h$, et en raison inverse de la viscosité.

Avec glissements égaux aux deux parois

$$fu = \mu\frac{\partial u}{\partial z}, \qquad z = -h; \qquad fu = -\mu\frac{\partial u}{\partial z}, \qquad z = +h.$$

$$u = \left(\frac{z^2 - h^2}{2\mu} - \frac{h}{f}\right)\frac{\partial p}{\partial x},$$

$$I = -\frac{\partial p}{\partial x}\left(\frac{2h^3}{3\mu} + \frac{2h^2}{f}\right),$$

le glissement se traduit par la présence d'un terme en h^2, inversement proportionnel au coefficient de frottement à la paroi.

44. États lentement variables. — $\frac{\partial p}{\partial x}$ peut être une fonction quelconque de t. Lorsque la variation de $\frac{\partial p}{\partial x}$ est lente en fonction du temps, on peut adopter approximativement la même solution

$$u = \left(\frac{z^2 - h^2}{2\mu} - \frac{h}{f}\right)\frac{\partial p}{\partial x},$$

pourvu que le terme $\rho\frac{\partial u}{\partial t}$, tiré de là, soit négligeable par rapport à $\frac{\partial p}{\partial x}$: soit $\rho\left(\frac{z^2 - h^2}{2\mu} - \frac{h}{f}\right)\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial p}{\partial x}$ négligeable devant $\frac{\partial p}{\partial x}$ ou, en prenant la plus grande valeur du premier terme ($z = 0$), et adoptant une approximation du millième :

$$\left|\frac{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)}{\frac{\partial p}{\partial x}}\right| < 10^{-3}\,\frac{2\mu f}{\rho(fh^2 + 2\mu h)}.$$

Cela donne une marge d'autant plus grande que la densité du liquide est moindre, que la viscosité est plus grande et que l'épaisseur $2h$ est plus petite.

45. Variation exponentielle $\frac{\partial p}{\partial x} = \varpi e^{-\theta t}$ sans glissement. — L'intégrale est

$$u = e^{-\theta t}\left(\frac{\varpi}{\rho\theta} + A\cos z\sqrt{\frac{\rho\theta}{\mu}} + B\sin z\sqrt{\frac{\rho\theta}{\mu}}\right),$$

avec les conditions d'adhérence

$$\frac{\varpi}{\rho\theta} + A\cos h\sqrt{\frac{\rho\theta}{\varpi}} \pm B\sin h\sqrt{\frac{\rho\theta}{\mu}} = 0,$$

qui donnent, en général,

$$B = 0, \qquad A = -\frac{\varpi}{\rho\theta}\,\frac{1}{\cos h\sqrt{\frac{\rho\theta}{\mu}}};$$

et exceptionnellement B arbitraire lorsque

$$h\sqrt{\frac{\rho\theta}{\mu}} = k\pi \qquad \text{avec} \qquad A = \pm\frac{\varpi}{\rho\theta}$$

suivant la parité de k. Ainsi il y a des valeurs de θ, en nombre infini pour chaque épaisseur $2h$, données par

$$\theta_1 = \frac{\mu}{\rho}\,\frac{k^2\pi^2}{h^2} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

qui laissent indéterminée l'amplitude B du terme impair en z; en d'autres termes, l'état initial, uniforme en x, impair en z, se résout en une infinité de mouvements simples, amortis, dont les taux d'amortissement θ_1 sont donnés par l'équation ci-dessus. Une circulation de ce genre se produit dans le niveau à bulle d'air.

En outre, il y a une infinité de valeurs de θ, données par

$$\theta_2 = \frac{\mu}{\rho}\,\frac{\pi^2\left(k + \frac{1}{2}\right)^2}{h^2},$$

qui annulent les cosinus, et rendent A infini (signe indéterminé), lorsque ϖ est fini. Il y a donc une infinité de valeurs de l'amortissement qui ne sont compatibles qu'avec une circulation très intense par couches alternatives inverses superposées.

Ici, comme dans certains exemples précédents, l'existence de μ sous un cosinus peut faire croître l'amplitude des mouvements, en même temps que la viscosité. Ces phénomènes peuvent se produire

pendant l'établissement exponentiel de l'écoulement permanent lorsque le tube n'est pas très étroit.

46. Variation exponentielle croissante $\frac{\partial p}{\partial x} = \varpi e^{\theta t}$ sans glissement. — L'intégrale est

$$u = e^{+\theta t} \frac{\varpi}{\rho\theta} \left[1 - \frac{\mathrm{Ch}\left(z\sqrt{\frac{\rho\theta}{\mu}}\right)}{\mathrm{Ch}\left(h\sqrt{\frac{\rho\theta}{\mu}}\right)} \right]$$

sans aucune ambiguïté.

47. Variation périodique $\frac{\partial p}{\partial x} = \varpi \sin\theta t$ sans glissement. — L'intégrale est

$$u = \left\{ \begin{aligned} &\cos\theta t \Big[\frac{\varpi}{\rho\theta} + \mathrm{A}\,\mathrm{Ch}(\tau z)\cos\tau z + \mathrm{A}'\,\mathrm{Sh}(\tau z)\sin\tau z \\ &\qquad + \mathrm{B}\,\mathrm{Sh}(\tau z)\cos\tau z + \mathrm{B}'\,\mathrm{Ch}(\tau z)\sin\tau z \Big] \\ &+ \frac{\sin\theta t}{4} \Big[-\mathrm{A}\,\mathrm{Sh}(\tau z)\sin(\tau z) + \mathrm{A}'\,\mathrm{Ch}(\tau z)\cos\tau z \\ &\qquad - \mathrm{B}\,\mathrm{Ch}(\tau z)\sin(\tau z) + \mathrm{B}'\,\mathrm{Sh}(\tau z)\cos\tau z \Big] \end{aligned} \right.$$

avec

$$\begin{aligned} \frac{\varpi}{\rho\theta} + \mathrm{A}\,\mathrm{Ch}(\tau h)\cos(\tau h) + \mathrm{A}'\,\mathrm{Sh}(\tau h)\sin(\tau h) &= 0, \\ -\mathrm{A}\,\mathrm{Sh}(\tau h)\sin(\tau h) + \mathrm{A}'\,\mathrm{Ch}(\tau h)\cos(\tau h) &= 0, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathrm{B}\,\mathrm{Sh}(\tau h)\cos(\tau h) + \mathrm{B}'\,\mathrm{Ch}(\tau h)\sin(\tau h) &= 0, \\ -\mathrm{B}\,\mathrm{Ch}(\tau h)\sin(\tau h) + \mathrm{B}'\,\mathrm{Sh}(\tau h)\cos(\tau h) &= 0, \end{aligned}$$

B et B′ sont toujours nuls; et l'on a

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{Ch}(\tau h)\cos\tau h} = \frac{\mathrm{A}'}{\mathrm{Sh}(\tau h)\sin\tau h} = \frac{-\frac{\varpi}{\rho\theta}}{\cos^2\tau h + \mathrm{Sh}^2(\tau h)}.$$

Si τh est grand, A et A′ sont beaucoup plus petits que $\frac{\varpi}{\rho\theta}$; mais les produits $\mathrm{A}\,\mathrm{Ch}(\tau z)$, $\mathrm{A}'\,\mathrm{Sh}(\tau z)$ prennent auprès des plans fixes une valeur de même ordre que $\frac{\varpi}{\rho\theta}$. Les valeurs de A et A′ sont alternativement positives et négatives, suivant les valeurs croissantes de τh.

Il n'y a pas d'indéterminations ni de valeurs infinies dans ce cas.

Les exemples qui précèdent suffisent à nous donner une idée de la

variété des phénomènes possibles. Qualitativement, les résultats peuvent évidemment être appliqués à des mouvement réalisables, comme celui du liquide compris entre deux cylindres concentriques, ou même de l'écoulement à travers un tube capillaire. L'influence de la loi de variation exponentielle ou périodique en fonction du temps est évidemment de même ordre, bien que la discussion complète se présente comme plus compliquée.

CHAPITRE IV.

MOUVEMENT RECTILIGNE A DEUX DIMENSIONS.

I. — PLANS ET CYLINDRES MOBILES.

48. Problèmes étudiés. — C'est au même point de vue des applications qualitatives, et même quantitatives, comme corrections, que nous allons traiter quelques autres problèmes, où interviennent les bords des plans mobiles.

Supposons encore la vitesse u indépendante de x, mais fonction de y et z, et les vitesses v et w nulles. p est alors indépendant de y et de z et linéaire en x; nous nous occuperons seulement des problèmes où $\frac{\partial p}{\partial y}$ est nul. On a alors

$$\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=\rho\frac{\partial u}{\partial t}.$$

Ces conditions sont applicables aux mouvements de cylindres quelconques suivant leurs génératrices, parallèles à Ox.

Mouvements permanents. — La vitesse u satisfait à l'équation du potentiel cylindrique

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,$$

avec la condition $u=U$, constante, sur tout le contour de la section droite de chaque cylindre; ce sont les conditions auxquelles est soumis le potentiel électrique autour de cylindres conducteurs quelconques; toutes les solutions de ce genre obtenues en électricité sont applicables ici. La densité électrique $\frac{-1}{4\pi}\frac{\partial u}{\partial n}$ a pour correspondante ici la force tangentielle $\mu\frac{\partial u}{\partial n}$. En sorte que la résistance tangentielle totale par unité de longueur est égale à $-4\pi\mu M$, en appelant M la

charge totale du cylindre; elle est reliée à toutes les vitesses de tous les cylindres, comme M aux potentiels, par une relation linéaire dont les coefficients sont égaux aux capacités C multipliées par $-4\pi\mu$.

Quelques exemples utiles pour la suite seront seuls traités ici.

49. Méthode analytique. — On sait que l'intégrale générale de cette équation est

$$u = \text{partie réelle de } f(y + zi),$$

f étant une fonction entièrement arbitraire qui peut contenir des constantes complexes $a + bi$ en nombre quelconque.

Les courbes définies par

$$v = \text{coeff. de } i \text{ dans } f(y + zi)$$

sont orthogonales aux courbes u, et l'on établit facilement que le long d'un élément d'arc s, $s + ds$ d'une courbe $u = \text{const.}$, on a

$$\frac{\partial u}{\partial n} ds = dv,$$

n étant la normale du côté des u croissants, et s l'arc croissant avec v.

Il arrive quelquefois que l'on ait intérêt, pour la simplicité des formules, à conserver une variable auxiliaire en évidence

$$u + vi = \varphi(\alpha + \beta i), \qquad y + zi = \psi(\alpha + \beta i),$$

et l'on a toujours

$$\frac{\partial u}{\partial n} ds = dv.$$

Le frottement dF par unité de longueur de la bande dont la largeur est ds est donc exprimé très simplement par

$$dF = \mu\, dv$$

et, le long de la bande comprise entre s_1 et s_2, par

$$F_{s_1}^{s_2} = \mu(v_2 - v_1).$$

50. Cylindre circulaire de rayon a se mouvant suivant sa longueur

$$u = U + A \log \frac{r}{a}.$$

— Même difficulté que pour le plan indéfini lorsque le liquide s'étend indéfiniment; le seul mouvement permanent qui laisse la vitesse finie

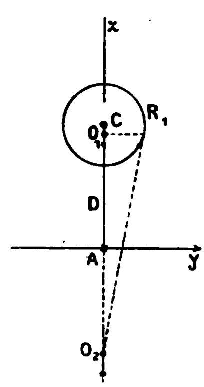
au loin est l'entraînement de tout le liquide avec la même vitesse U. Inutile de revenir sur ce sujet. La difficulté subsiste quelle que soit la forme du cylindre, même quand sa section est limitée, en particulier pour une lame plane de largeur finie. Elle disparaît dès qu'on précise la position des parois fixes; avec un cylindre immobile de rayon R, concentrique au cylindre a, on trouve ainsi

$$u = U\left(1 + \frac{\log \frac{r}{a}}{\log \frac{a}{R}}\right) = U \frac{\log \frac{r}{R}}{\log \frac{a}{R}},$$

avec une résistance totale par unité de longueur $\dfrac{2\pi\mu U}{\log\left(\frac{a}{R}\right)}$.

51. Cylindre dans le voisinage d'un plan fixe indéfini, $z = 0$. — Soit R_1 le rayon du cylindre, et $z = \pm D$, $y = 0$, deux points O_1, O_2 symétriques par rapport au plan, que nous prenons pour origines de

Fig. 6.



coordonnées bipolaires r_1, r_2. La distance AC de l'axe du cylindre au plan est $\sqrt{D^2 + R_1^2}$. L'intégrale est

$$u = U \frac{\log r_1 - \log r_2}{\log\left(\sqrt{\frac{D^2}{R_1^2} + 1} - \frac{D}{R_1}\right)}$$

et le frottement total est par unité de longueur

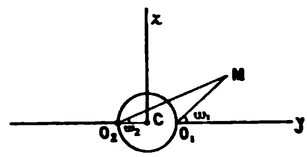
$$F = \frac{2\pi\mu U}{\log\left(\sqrt{\frac{D^2}{R_1^2} + 1} - \frac{D}{R_1}\right)}.$$

52. Cylindre mobile et plan diamétral extérieur fixe. — Prenons pour origines $O_1 O_2$ de coordonnées bipolaires les arêtes de contact du cylindre et du plan, et appelons ω_1, ω_2 les angles de MO_1, MO_2 avec un des plans, pris comme origine. La solution est

$$u = \frac{2U}{\pi}(\omega_1 - \omega_2).$$

Elle donne en effet $u = U$ sur la circonférence qui a $O_1 O_2$ comme

Fig. 7.



diamètre, et $u = 0$ sur les deux demi-plans extérieurs et partout à l'infini. Le frottement par unité de longueur axiale sur l'élément de contour ω_2, $\omega_2 + d\omega_2$ est

$$dF = \frac{2\mu U}{\pi} d[\log(\tang \omega_2)].$$

Entre deux génératrices définies par les angles ω'_2, ω''_2, qu'on peut prendre l'un très petit, l'autre très voisin de 90°, le frottement total est

$$F_{\omega'_2}^{\omega''_2} = \frac{2\mu U}{\pi} \log\left(\frac{\tang \omega''_2}{\tang \omega'_2}\right).$$

Mais on ne peut ni partir de 0, ni aller jusqu'à $\frac{\pi}{2}$; l'intégrale devient infinie.

Le frottement devient infini dans les angles, à cause de l'extrême proximité de la partie fixe et de la partie mobile; on voit qu'il n'est pas nécessaire pour cela que les parties fixe et mobile soient tangentes; il suffit qu'elles aient une arête commune.

Dans une expérience, le jeu nécessaire à la liberté du mouvement supprimerait cette difficulté.

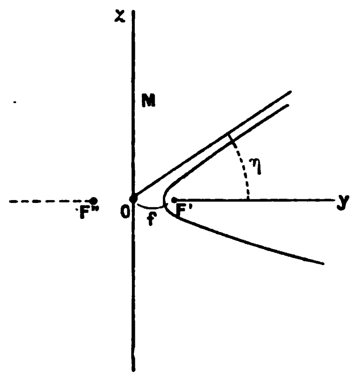
L'influence de ce jeu très petit pourrait être calculée au moyen de l'exemple suivant.

53. Plan mobile infini normal à un plan fixe limité (*fig.* 8). — La solution est fournie par les coordonnées hyperboliques homofocales, de foyers $y = \pm f$, $z = 0$. Les lignes d'égale vitesse sont des

hyperboles de foyers F′, F″; soit η l'angle de l'asymptote avec la ligne des foyers, la solution est

$$u = \frac{2\eta U}{\pi},$$

Fig. 8.



qui donne $u = 0$ dans le plan $z = 0$ au delà du foyer ($\eta = 0$), et $u = U$ dans tout le plan $y = 0$.

L'autre coordonnée d'un point quelconque du plan est l'angle α, tel que $\text{Th}(\alpha)$ soit égal au rapport du petit au grand axe de l'ellipse qui passe par ce point. En particulier, en un point M du plan mobile, d'ordonnée z (petit axe de l'ellipse), on a

$$\alpha = \frac{1}{2} \log \frac{\sqrt{z^2 + f^2} + z}{\sqrt{z^2 + f^2} - z};$$

on tire facilement de là que, sur la bande comprise entre z et $z + dz$, le frottement est

$$dF = \mu \frac{2U}{\pi} d\alpha,$$

ce qui fait, pour toute l'étendue comprise entre o et $+ h$,

$$F_0^h = \mu \frac{2U}{\pi} \frac{1}{2} \log \frac{\sqrt{h^2 + f^2} + h}{\sqrt{h^2 + f^2} + h}.$$

Pour de grandes valeurs de h, ceci se réduit à

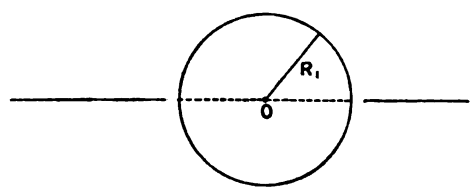
$$\mu \frac{2U}{\pi} \log \frac{2h}{f}.$$

54. Cylindre de rayon R, entre demi-plans diamétraux, avec un très petit jeu *f*. — Effectuons maintenant le raccord avec l'exemple 52, en prenant comme point de jonction celui où l'angle a la valeur très petite ω'_2 : on a exactement

$$\operatorname{tang}\omega'_2 = \frac{h}{2R_1},$$

h étant compté sur le plan tangent.

Fig. 9.



La portion du frottement provenant du quart de cylindre, de ω'_2 à $\frac{\pi}{4}$, est

$$F_{\omega'_2}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{2\mu U}{\pi} \log\frac{2R_1}{h};$$

le frottement qui provient de la partie voisine du plan diamétral, entre o et ω'_2 ou o et h, est

$$F_0^{\omega'_2} = \frac{2\mu U}{\pi}\left(\log\frac{2h}{f} + \frac{f^2}{8h^2} + \ldots\right).$$

Au total le quart de cylindre avec le léger jeu f donne, en négligeant $\frac{f^2}{8h^2}$, une résistance

$$F_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{2\mu U}{\pi}\log\left(\frac{4R_1}{f}\right),$$

et le cylindre tout entier par unité de longueur, quatre fois plus, soit

$$F = \frac{8\mu U}{\pi}\log\frac{4R_1}{f}.$$

Pour effectuer la jonction, on a supposé à la fois $\frac{f^2}{4h^2}$ négligeable et $\frac{h}{2R_1}$ petit ; mais il est difficile de préciser la limite de petitesse de $\frac{h}{2R_1}$, qui n'est définie que par la condition de coïncidence suffisante du cylindre et de son plan tangent.

Admettant par exemple qu'on puisse prendre $\frac{h}{2R_1}$ égal à 0,033 sans erreur du millième, ce qui paraît bien probable, la condition de contact étant du deuxième ordre, il reste que $\frac{f^2}{8h^2}$, ou $\frac{10^3}{8}\frac{f^2}{4R_1^2}$ soit négligeable devant $\log\left(\frac{4R_1}{f}\right)$; c'est ce qui arrive déjà pour $f = 0{,}02\,R$, qui donne

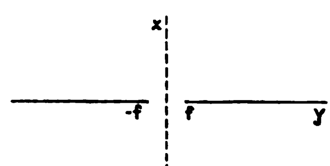
$$\frac{10^3}{8}\frac{f^2}{4R_1^2} = \frac{1}{80} \quad \text{avec} \quad \log\frac{4R_1}{f} = 5{,}3;$$

l'approximation est de $\frac{1}{400}$.

55. Deux plaques l'une fixe l'autre mobile dans le prolongement l'une de l'autre, avec un jeu $2f$. — Les mêmes coordonnées hyperboliques que dans l'exemple 53 donnent

$$u = \frac{\eta U}{\pi}.$$

Fig. 10.



La coordonnée elliptique d'un point du plan mobile d'abscisse y (grand axe de l'ellipse) est

$$\alpha = \frac{1}{2}\log\frac{y+\sqrt{y^2-f^2}}{y-\sqrt{y^2-f^2}},$$

et le frottement sur une largeur y, $y+dy$ du plan mobile, d'un seul côté $z > 0$, est

$$dF = \mu\frac{U}{\pi}\,d\alpha;$$

depuis le bord $y = f$, $\alpha = 0$, jusqu'à une distance y, cela fait

$$F_f^y = \frac{\mu U}{2\pi}\log\frac{y+\sqrt{y^2-f^2}}{y-\sqrt{y^2-f^2}}.$$

Pour une valeur de y grande par rapport à f, cela devient sur les

deux faces

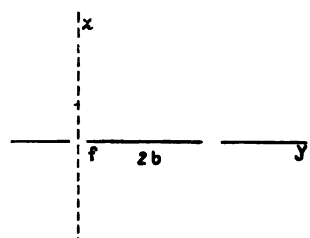
$$F = 2 \times \frac{\mu U}{2\pi}\left[2\log\left(\frac{2y}{f}\right) - \frac{f^2}{4y^2} + \ldots\right],$$

et peut aussi servir comme terme de correction pour l'influence d'un bord, avec un léger jeu, sans lequel le frottement du bord serait infini.

On ne peut d'ailleurs l'appliquer à une lame infiniment large; le logarithme rend encore le frottement infini.

56. Lame mobile prolongée par deux lames fixes. — De l'exemple précédent on peut tirer, pour une lame mobile de largeur $2b$, com-

Fig. 11.



prise entre deux lames fixes indéfinies situées dans son prolongement, avec un faible jeu $2f$, que le frottement sur les deux faces diffère certainement peu de la valeur

$$F = 2 \times 2 \times \frac{\mu U}{2\pi}\left[2\log\left(\frac{4b+2f}{f}\right) - \frac{f^2}{16b^2}\right],$$

obtenue en superposant les effets des deux bords, sur toute la largeur de la plaque ($y = 2b + f$), ce qu'autorise le caractère linéaire des équations.

57. Plan mobile à bord libre, $y \leqq 0$, à une hauteur $z = h$, au-dessus d'un plan fixe indéfini, $z = 0$. — L'intégrale est fournie par

$$y - \frac{h}{\pi} = \frac{hv}{U} + \frac{h}{\pi} e^{\frac{\pi v}{U}} \cos\frac{\pi u}{U},$$

$$z = \frac{hu}{U} + \frac{h}{\pi} e^{\frac{\pi v}{U}} \sin\frac{\pi u}{U}.$$

Sur une largeur dy de la lame mobile ($u = U$) le frottement est

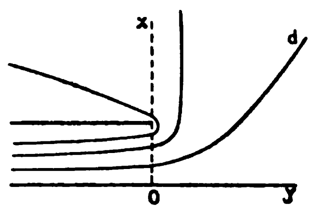
$\mu\, dv$, avec

$$y = \frac{h}{\pi} + \frac{hv}{U} - \frac{h}{\pi} e^{\frac{\pi v}{U}},$$

$$dy = \frac{h}{U}\left(1 - e^{\frac{\pi v}{U}}\right) dv.$$

La connaissance du frottement total μv depuis le bord $y = 0$,

Fig. 12.



$v = 0$, jusqu'à une certaine distance, exige la résolution par rapport à v de l'équation transcendante qui donne v en y; on fait plus facilement le calcul en dressant une Table de valeurs correspondantes négatives de $\frac{\pi y}{h}$ et de $\frac{\pi v}{U}$, ou en traçant le graphique correspondant. Tout près du bord, la relation est sensiblement parabolique

$$(1) \qquad y = -\frac{h\pi}{2U^2} v^2, \qquad v = \pm U \sqrt{\frac{-2y}{\pi h}} \qquad \begin{pmatrix} + \text{ face externe} \\ - \text{ face interne} \end{pmatrix},$$

le frottement tout au bord, jusqu'à la petite distance $-y$, est sur chaque face

$$F_0^{-y} = -\mu U \sqrt{\frac{-2y}{\pi h}}.$$

Lorsque la lame mobile est très large, l'évaluation du frottement total se fait sans difficulté. Loin du bord en effet ($y < 0$, $v < 0$ très grands), on a sur la face interne en première approximation

$$v = -\frac{U}{h}\left(-y + \frac{h}{\pi} - \frac{h}{\pi} e^{\frac{\pi y}{h} - 1}\right),$$

et dès que $-y$ est un peu grand, le dernier terme devient négligeable (inférieur à $0{,}01 \frac{h}{\pi}$, si $-y > 3{,}6 \frac{h}{\pi}$ ou sensiblement $1{,}2\, h$), et le frottement

$$F_1 = -\mu \frac{U}{h}\left(-y + \frac{h}{\pi}\right)$$

est proportionnel à la largeur ($-y$) augmentée de $L = \frac{h}{\pi}$.

Loin du bord, sur la face externe ($v > 0$ très grand), on a sensiblement

$$v = \frac{U}{\pi}\left(\frac{h - \pi y}{-\pi y}\right)\log\left(1 - \frac{\pi y}{h}\right);$$

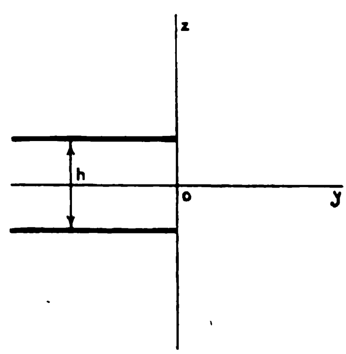
le logarithme devient infini mais croît néanmoins beaucoup moins vite que $\frac{\pi y}{h}$, qui intervient sur l'autre face. Très loin, lorsque le facteur $\frac{h - \pi y}{-\pi y}$ peut être remplacé par l'unité, l'effet du bord correspond encore à sa largeur ($-y$) augmentée de $L = \frac{h}{\pi}$. Le frottement est

$$F_2 = -\frac{\mu U}{\pi}\log\left(1 - \frac{\pi y}{h}\right).$$

Le frottement total jusqu'à une distance y, grande par rapport à h, est égal à $F_1 + F_2$.

58. **Deux plans parallèles limités au même niveau, $y = 0$, l'un fixe, l'autre mobile avec la vitesse U à la distance h.** — La même solution convient, mais en écrivant maintenant $\frac{U}{2}$ et $\frac{h}{2}$ à la place de U et de h.

Fig. 13.



Frottement dû au bord, jusqu'à la distance $-y$, sur l'ensemble des deux faces du plan mobile

$$F = -\frac{\mu U}{h}\left[-y + \frac{h}{2\pi} + \log\left(1 - \frac{2\pi y}{h}\right)\right].$$

La vitesse à l'infini hors des lames n'est pas nulle, mais égale à $\frac{U}{2}$, ce qui n'est pas exactement la condition à remplir.

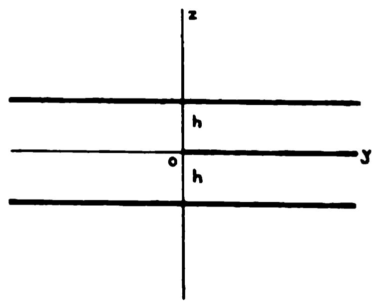
59. **Plan mobile avec un bord ($y > 0$) entre deux plans fixes indéfinis, à distance $\pm h$.** — L'intégrale correspondante s'exprime faci-

lement à l'aide d'une variable auxiliaire

$$y + iz = \frac{h}{\pi}\{i\pi - \log[(\alpha + \beta i)^2 - 1]\},$$

$$v + iu = \frac{U}{\pi}\log\frac{\alpha + \beta i - 1}{\alpha + \beta i + 1}.$$

Fig. 14.



On a, en effet,

Lame mobile : $\beta = 0,\quad \alpha^2 - 1 < 0,\quad y + iz = -\frac{h}{\pi}\log(1 - \alpha^2)\quad$ (bord $\alpha = 0$),

$$v + iu = \frac{U}{\pi}\left(\log\frac{1-\alpha}{1+\alpha} + i\pi\right),$$

Lames fixes : $\begin{cases} \beta = 0, & \alpha > 1, & y + iz = \frac{h}{\pi}[i\pi - \log(\alpha^2 - 1)], \\ \beta = 0, & \alpha < -1, & y + iz = \frac{h}{\pi}[i\pi - 2i\pi - \log(\alpha^2 - 1)], \end{cases}$

$$v + iu = \frac{U}{\pi}\log\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}.$$

Sur la face supérieure de la lame mobile, le frottement, depuis le bord ($y = 0$, $\alpha = 0$, $v = 0$) jusqu'à une distance y, est

$$\mu v = \mu\frac{U}{\pi}\log\frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$

avec

$$\alpha = \sqrt{1 - e^{-\frac{\pi y}{h}}}$$

ou

$$F = -\mu\frac{U}{\pi}\left[\frac{\pi y}{h} + 2\log\left(1 + \sqrt{1 - e^{-\frac{\pi y}{h}}}\right)\right].$$

Lorsque y est un peu grand, on a toute l'influence du bord en prenant pour le frottement

$$F = -\mu\frac{U}{\pi}\left(\frac{\pi y}{h} + 2\log 2\right),$$

Le frottement total est le même que si la distribution était uniforme jusqu'au bord, et si la lame avait une bande supplémentaire $L = 2 \log 2 \times \frac{h}{\pi}$ au delà du bord.

Ce problème a été traité par Maxwell, en 1865, avec des indications de lord Kelvin, pour la correction de l'influence des bords des disques dans ses expériences sur la viscosité des gaz.

60. Autres exemples. — On trouvera des détails bibliographiques avec un assez grand nombre d'autres applications dans le livre de J.-J. Thomson : *Recent researches in Electricity and Magnetism*, 1893, au Chapitre III, *Conjugate functions*.

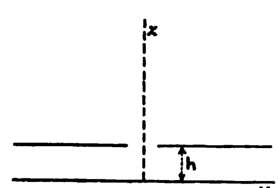
On trouve ainsi que, lorsque la plaque mobile a une épaisseur $2e$, la distance des plaques fixes indéfinies étant toujours $2h$, la largeur de la bande supplémentaire qui équivaut à toute l'action du bord est (J.-J. Th., n° 237, p. 218...)

$$L = \frac{h}{\pi} \log \frac{2h - e}{e} + \frac{h - e}{\pi} \log \frac{e(2h - e)}{(h - e)^2}.$$

Cette correction complète est utile lorsque les deux lames fixes sont très rapprochées du disque mobile, comme dans les expériences de Kundt et Warburg.

61. Plateau de garde. — Deux demi-plateaux fixes, infiniment minces, dans le prolongement l'un de l'autre ($y < -f$ et $y > f$,

Fig. 15.



$z = h$), avec une fente de largeur $2f$, au-dessus d'un plateau indéfini mobile ($z = 0$).

La solution assez compliquée est donnée par

$$y + iz = \frac{h}{\pi} \times \left[\frac{2a}{1 - a^2} (\alpha + \beta i) + i\pi - \log \frac{\alpha + \beta i - a}{\alpha + \beta i + a} \right],$$

$$v + ui = i\mathrm{U} + \frac{\mathrm{U}}{\pi} \log \frac{\alpha + \beta i + a}{\alpha + \beta i - a},$$

où a est une quantité auxiliaire déterminée par l'équation

$$\frac{2a}{1-a^2} + \log\frac{1+a}{1-a} = \frac{\pi f}{h}.$$

Plan mobile, $\beta = 0$, $-a < \alpha < a$;
Bords des plans fixes, $\beta = 0$, $\alpha = \pm 1$;
Plan fixe de gauche, $\beta = 0$, $-\infty < \alpha < -1$.
Plan fixe de droite, $\beta = 0$, $1 < \alpha < \infty$.

Le frottement sur l'un des plateaux fixes est le même que si la distribution était uniforme, et si le plateau avait une bande supplémentaire de largeur

$$L = f - \frac{h}{\pi}\frac{2a^2}{1-a^2}\cdots$$

Pour une fente très étroite, cette expression devient

$$L = f - \frac{\pi}{8}\frac{f^2}{h};$$

pour une fente très large par rapport à la distance h, l'expression de la largeur additionnelle devient

$$L = \frac{3}{2}\frac{h}{\pi} - \frac{1}{4}\frac{h^2}{\pi^2 f}\cdots$$

Telle est la correction que nécessite la fente entre le plateau de mesure et le plateau de garde.

II. — L'ÉCOULEMENT DANS DES TUBES IMMOBILES.

62. Tube rectiligne de section uniforme. Distribution des pressions. — Nous supposons que la vitesse est partout parallèle à l'axe du tube et que le régime permanent est établi.

Prenons l'axe du tube comme axe des x, l'axe Oy horizontal et l'axe Oz perpendiculaire à Oxy vers le haut.

Soit γ l'angle de l'axe Ox au-dessous du plan horizontal.

Les équations de l'équilibre

$$\begin{aligned} -p'_{0x} + \rho g \sin\gamma &= 0, \\ -p'_{0y} &= 0, \\ -p'_{0z} - \rho g \cos\gamma &= 0 \end{aligned}$$

définissent la pression hydrostatique p_0.

La vitesse en chaque point se réduit à la composante u puisqu'on la suppose parallèle à l'axe du tube.

Soit $p + p_0$ la pression pendant le mouvement. En tenant compte des équations de l'équilibre, les équations générales du mouvement deviennent

$$-p'_x + \mu\,\Delta u = \rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right), \qquad -p'_y = 0, \qquad -p'_z = 0.$$

Les deux dernières équations nous montrent que p est fonction de x seulement : la pression est uniforme dans toute section du tube.

L'équation de continuité

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

se réduit d'ailleurs, puisque v et w sont nuls, à

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

La vitesse du fluide est constante en tous les points d'une même parallèle à l'axe.

La première équation du mouvement, la seule qui subsiste, devient d'après cela

$$(1) \qquad p'_x = \mu\,\Delta u.$$

Or Δu ne dépend pas de x, et p ne dépend que de x. On doit donc avoir

$$p'_x = \text{const.},$$

ce qui signifie que la pression varie uniformément d'un bout à l'autre du tube.

Appelons l la longueur du tube et P la différence des pressions aux deux bouts ; on a

$$-p'_x = \frac{P}{l};$$

et l'équation (1) donne

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{P}{\mu l}.$$

Telle est l'équation qui détermine la distribution de vitesse dans la section droite du tube.

63. Section circulaire. — Δu est alors fonction de la seule distance à l'axe, r. Transformons en coordonnées polaires dans le plan de la section droite; il vient

$$\Delta u = \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} = \frac{1}{r}\left[\frac{d}{dr}\, r\, \frac{du}{dr}\right],$$

et, par suite,

$$\frac{1}{r}\left[\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right)\right] = -\frac{P}{\mu l},$$

d'où, successivement

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) = -\frac{Pr}{\mu l},$$

$$r\frac{du}{dr} = -\frac{P}{2\mu l}r^2 + A,$$

$$\frac{du}{dr} = -\frac{P}{2\mu l}r + \frac{A}{r},$$

$$u = -\frac{P}{4\mu l}r^2 + A\log r + B.$$

Dans un tube circulaire plein de liquide, la vitesse est finie même pour $r = 0$; A est donc nul; d'où

$$u = -\frac{P}{4\mu l}r^2 + B.$$

Soit maintenant r_1 le rayon du tube s'il y a adhérence, ou, dans le cas contraire, le rayon du tube idéal plus grand sur lequel l'adhérence aurait lieu ($u = 0$); on aura

$$u = \frac{P}{4\mu l}(r_1^2 - r^2).$$

Dans un tube annulaire, compris entre deux cylindres concentriques de rayons r_0 et $r_1 > r_0$, le long desquels il y a adhérence, A n'est pas nul, et l'on a

$$u = \frac{P}{4\mu l}\left[-r^2 + \frac{r_1^2 - r_0^2}{\log\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\log r - \frac{r_1^2\log r_0 - r_0^2\log r_1}{\log\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}\right].$$

64. Tube circulaire. Calcul du débit. — Ce qu'on mesure facilement, ce n'est pas la distribution des valeurs de u dans une section du tube, c'est le débit total I correspondant à toute la section.

Le débit à travers une couronne comprise entre deux cercles de rayons r et $r + dr$ est $u\,.\,2\pi r\,dr$.

Le débit total I est donc

$$I = \int_0^{r_2} u.2\pi r.dr = \frac{2\pi P}{4\pi l}\int_0^{r_2}(r_1^2 - r^2)\,r\,dr,$$

r_2 étant le rayon véritable du tube, différent de r_1 s'il y a glissement à la paroi.

L'intégration donne

$$I = \frac{2\pi P}{4\mu l} r_2^2 \left(\frac{r_1^2}{2} - \frac{r_2^2}{4}\right).$$

S'il n'y a pas de glissement à la paroi, on a

$$r_1 = r_2,$$

et alors I devient

$$I = \frac{\pi P}{8\mu l} . r_1^4,$$

d'où, les lois suivantes :

Le débit est proportionnel :

1° *A la différence des pressions aux deux bouts du tube.* (Loi des pressions.)

2° *A la quatrième puissance du diamètre.* (Loi des diamètres.)

3° *A l'inverse de la longueur.* (Loi des longueurs.)

Ces lois, découvertes expérimentalement par Poiseuille (Livre II, Chap. I), portent son nom.

65. **Cas où il y a glissement à la paroi.** — Dans ce cas, posons $r_2 = r_1 - \varepsilon$ et négligeons $\left(\frac{\varepsilon}{r_2}\right)^2 \cdots$,

$$I = \frac{2\pi P}{4\mu l}\left(\frac{r_2^4}{4} + r_2^3 \varepsilon\right).$$

La loi des pressions et celle des longueurs sont conservées, mais la loi des diamètres se modifie. Un terme proportionnel au cube du diamètre apparaît.

Si même l'épaisseur ε est comparable au diamètre, il faut déterminer le rayon auxiliaire r_1 en tenant compte de la courbure, ou mieux déterminer la constante d'intégration $B = \frac{P}{4\mu l \pi} r_1^2$ directement :

$$-\mu \frac{\partial u}{\partial r} = k u \qquad \text{ou} \qquad \varepsilon \frac{\partial u}{\partial r} = u \qquad (r = r_2)$$

donne

$$+\frac{P\varepsilon}{2\mu l}r_2=\frac{P}{4\mu l}(r_1^2-r_2^2),$$

$$r_1^2=r_2^2+2\varepsilon r_2.$$

La formule, qu'on pouvait croire approchée, est donc rigoureuse.

Résistance du tube. — On peut écrire la formule du débit sous la forme

$$P=\frac{8\mu l}{(r_2^2+4\varepsilon r_2)\pi r_2^2}I=\mathcal{R}I$$

en représentant par $\mathcal{R}$ la quantité $\frac{8\mu l}{\pi r_2^2(r_2^2+4\varepsilon r_2)}$ qu'on appellera la *résistance du tube*.

66. Tube annulaire centré sans glissement. — La formule générale du débit donne

$$I=\frac{\pi P}{2\mu l}\left(-\frac{r_1^4-r_0^4}{4}-\frac{r_1^2\log r_0-r_0^2\log r_1}{\log r_1-\log r_0}\frac{r_1^2-r_0^2}{2}\right.$$
$$\left.+\frac{r_1^2-r_0^2}{\log r_1-\log r_0}\left[\frac{r_1^2\log r_1-r_0^2\log r_0}{2}-\frac{r_1^2-r_0^2}{4}\right]\right)$$

et en simplifiant

$$I=\frac{\pi P}{8\mu l}(r_1^2-r_0^2)\left[r_1^2+r_0^2-\frac{r_1^2-r_0^2}{\log\frac{r_1}{r_0}}\right].$$

Dans le cas limite où r_1 diffère très peu de r_0, on peut simplifier la formule, et la réduire à

$$I=\frac{\pi P}{8\mu l}(r_1^2-r_0^2)\frac{(r_1-r_0)^2}{2}+\ldots.$$

La résistance du tube annulaire étroit est

$$\mathcal{R}=\frac{16\mu l}{\pi(r_1^2-r_0^2)}\frac{1}{(r_1-r_0)^2}.$$

Application. — L'introduction progressive d'une tige dans un tube, à mesure qu'un ressort se tend, est utilisée dans les lampes modérateurs pour régulariser le débit.

On peut obtenir une régularité parfaite par une proportion convenable. La tension du ressort donne une pression P_0+P_1x lorsque le ressort a subi une déformation x. La résistance du tube dont une

partie de longueur reste libre, tandis qu'une autre de longueur x est modifiée, est

$$\mathcal{R}_0 + \mathcal{R}_1 \frac{x}{l}$$

et le débit I, défini par

$$P_0 + P_1 x = I\left(\mathcal{R}_0 + \mathcal{R}_1 \frac{x}{l}\right),$$

est constant si l'on a

$$\frac{\mathcal{R}_0}{P_0} = \frac{\mathcal{R}_1}{P_1 l}.$$

67. Section elliptique (1) (Mathieu, 1863 : Boussinesq, 1868). — Lorsque la section elliptique a pour demi-axes a, b, l'intégrale de l'équation en u, qui s'annule sur le contour, est

$$u = \frac{P}{2\mu l}\frac{a^2 b^2}{a^2+b^2}\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)$$

qui donne un débit

$$I = \int\int u\,dx\,dy = \frac{P}{4\mu l}\frac{\pi a^3 b^3}{a^2+b^2},$$

d'où

$$\mathcal{R} = \frac{4\mu l}{\pi ab}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right).$$

A égalité de section ($\pi ab = \pi r_1^2$), la résistance dépend très peu de l'inégalité des axes; posons, en effet,

$$ab = r_1^2, \qquad \frac{a}{b} = 1 + \alpha,$$

il vient

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{r_1^2}\left(1 + \alpha + \frac{1}{1+\alpha}\right) = \frac{1}{r_1^2}(2 + \alpha^2 - \alpha^3 \ldots).$$

La résistance ne dépasse celle du tube circulaire que de 0,001 pour $\alpha = 0,05$ et de 0,01 pour $\alpha = 0,14$. On peut donc négliger l'influence de l'ellipticité tant qu'elle n'est pas très accentuée.

Dans ce même Mémoire, M. Boussinesq a donné la solution pour plusieurs autres formes de sections. Le problème mathématique est le même que celui de la rotation d'un liquide parfait dans un vase

(1) MATHIEU, *Comptes rendus*, t. LVII, 1863, p. 320. — BOUSSINESQ, *Journal de Liouville*, t. XIII, 1868, p. 377.

prismatique de même section, en remplaçant la vitesse longitudinale u par le flux plan dans la section droite

$$\psi\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}=v,\ \frac{\partial\psi}{\partial y}=-w,\ \frac{P}{\mu l}=\omega,\ \text{vitesse angulaire}\right).$$

Il a aussi son analogue en électromagnétisme.

68. Applications. Rapidité d'emploi du niveau d'arpenteur. — I. Deux flacons cylindriques sont réunis par un tube assez long et assez étroit pour que les lois de Poiseuille soient applicables à chaque instant. Étudier le mode d'établissement de l'équilibre hydrostatique : oscillations amorties, ou onde amortie sans oscillations.

II. Les deux flacons sont placés sur les deux plateaux d'une balance; ils communiquent par un siphon fixe long et étroit. Extinction des oscillations de la balance.

III. Les deux flacons sont fixes; le siphon qui les réunit est fixé au fléau d'une balance. Comment les dénivellations dans les deux flacons agissent-elles sur la balance, suivant la position du siphon et des niveaux de l'eau par rapport à l'axe de suspension du fléau.

III. — TRANSLATION DE LA SPHÈRE.

69. Translation rectiligne de la sphère (¹). — Le mouvement dans tous les plans méridiens étant le même, posons

$$u=\frac{\partial\Phi}{\partial x},\qquad v=\frac{\partial\Phi}{\partial y},\qquad w=\frac{\partial\Phi}{\partial z}+\mathrm{W};$$

les équations du mouvement lent deviennent

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-p+\mu\Delta\Phi-\rho\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)=0,$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-p+\mu\Delta\Phi-\rho\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)=0,$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\left(-p+\mu\Delta\Phi-\rho\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)+\mu\Delta\mathrm{W}-\rho\frac{\partial\mathrm{W}}{\partial t}=0,$$
$$\Delta\Phi+\frac{\partial\mathrm{W}}{\partial z}=0.$$

(¹) STOKES, *Mathem. Phys. Papers*, t. II, p. 10; t. III. p. 56.

La dernière équation conduit à poser :

$$\Phi = \frac{\partial \Psi}{\partial z} \qquad \text{et} \qquad W = -\Delta\Psi,$$

ce qui, porté dans les trois premières, donne

$$-p + \mu\Delta\frac{\partial \Psi}{\partial z} - \rho\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \Psi}{\partial z} = f(z, t),$$

$$\mu\Delta\,\Delta\Psi - \rho\frac{\partial}{\partial t}\Delta\Psi = \frac{\partial f}{\partial z},$$

en désignant par f une fonction arbitraire de z et t seuls.

La dernière équation déterminera Ψ et la précédente p, en tenant compte des conditions aux limites.

En particulier, à très grande distance du corps mobile, la pression est indépendante du temps et uniforme, ainsi que la vitesse w; les vitesses u, v sont nulles.

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x\,\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y\,\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \Delta\Psi = W; \qquad p = 0.$$

Ces conditions sont satisfaites en prenant $f(z, t) = 0$, ce que nous admettrons dans la suite.

La réaction éprouvée par la sphère est évidemment dirigée suivant Oz; sur un élément de surface de la sphère dont la normale fait avec Oz l'angle ζ, la composante parallèle à Oz est

$$Z = -p\cos\zeta + \mu\left[\sin\zeta\frac{\partial}{\partial \imath}\left(\frac{2\partial^2\Psi}{\partial z^2} - \Delta\Psi\right) + 2\cos\zeta\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} - \Delta\Psi\right)\right],$$

en posant

$$\imath = \sqrt{x^2 + y^2},$$

et la réaction totale est

$$\mathcal{R} = 2\pi R^2 \int_0^\pi Z \sin\zeta\, d\zeta.$$

70. Mouvement uniforme. — Donnons aux axes un mouvement de translation uniforme, ce qui ne change pas les équations du mouvement, et mettons l'origine des coordonnées au centre de la sphère. On satisfait à l'équation

$$\Delta\,\Delta\Psi = 0,$$

en posant

$$\Psi = \frac{a}{r} + br + W\frac{r^2}{2},$$

et appelant r la distance au centre de la sphère. D'où

$$u = \frac{xz}{r^2}\left(\frac{3a}{r^3} - \frac{b}{r}\right), \qquad v = \frac{yz}{r^2}\left(\frac{3a}{r^3} - \frac{b}{r}\right),$$

$$w = \frac{z^2}{r^2}\left(\frac{3a}{r^3} - \frac{b}{r}\right) - \left(\frac{a}{r^3} + \frac{b}{r} + \mathrm{W}\right), \qquad p = -2\mu\frac{bz}{r^3}.$$

La vitesse uniforme au loin est égale à $-\mathrm{W}$. Le long de la sphère, l'adhérence est complète; posons donc, pour $r = \mathrm{R}$,

$$\frac{3a}{\mathrm{R}^3} - \frac{b}{\mathrm{R}} = 0, \qquad \frac{a}{\mathrm{R}^3} + \frac{b}{\mathrm{R}} + \mathrm{W} = 0$$

ou

$$a = -\mathrm{W}\frac{\mathrm{R}^3}{4}, \qquad b = -\frac{3}{4}\mathrm{WR}, \qquad p = \frac{3}{4}\mu\mathrm{WR}\frac{z}{r^3}.$$

La solution étant ainsi entièrement déterminée, cherchons la réaction éprouvée par la sphère. L'expression générale donne ici

$$\mathcal{R} = 2\pi\mathrm{R}^2\int_0^{\pi}\left[2\mu\frac{b}{r^2}\cos^2\zeta + 2\mu\left(-\frac{15a}{r^4} + \frac{3b}{r^2}\right)\cos^2\zeta + \mu\left(\frac{3a}{r^4} + \frac{b}{r^2}\right)(\cos^2\zeta + 1)\right]\sin\zeta\, d\zeta$$

ou

$$\mathcal{R} = 6\pi\mu\mathrm{RW}.$$

Telle est l'expression de la réaction que le courant d'eau uniforme et constant, de vitesse W au loin, exerce sur la sphère de rayon R; c'est aussi la résistance que la sphère de rayon R éprouve à se mouvoir avec la vitesse constante W au sein du liquide immobile.

71. Applications. — 1° *Chute d'une goutte d'eau dans l'air sous son propre poids.* — La vitesse limite qu'acquiert la goutte sphérique de densité δ est

$$\mathrm{W} = \frac{2}{9}\frac{\delta}{\mu}g\mathrm{R}^2.$$

La goutte peut se déformer un peu, si elle est grosse. La composante normale de la force est en un point

$$\mathrm{N} = \frac{3\mu\mathrm{W}}{2\mathrm{R}}\cos\zeta,$$

et la composante tangentielle

$$\mathrm{T} = \frac{3\mu\mathrm{W}}{2\mathrm{R}}\sin\zeta;$$

cette dernière tire le liquide du pôle avant vers le pôle arrière, le long d'un méridien, et tend à produire dans la goutte une circulation avec retour au voisinage de l'axe, analogue à celle des vortex sphériques de Hill ([1]). Comme la viscosité de l'eau est grande, ce mouvement reste très lent dans la goutte.

La composante normale entre dans l'équation de la surface capillaire; négligeons les mouvements internes de la goutte, sensiblement sphérique, l'équation capillaire est sensiblement

$$zg\delta = \frac{3\mu W}{R}\cos\zeta + \varpi\left(\frac{1}{R'} + \frac{1}{R''}\right),$$

en appelant δ la densité et ϖ la tension superficielle du liquide; θ est l'angle de la normale avec la direction du mouvement; z la hauteur sous le centre, peu différente de $R\cos\theta$; R le rayon moyen; R' et R'' les deux rayons de courbure vrais, peu différents de R. La goutte s'allonge en poire, aplatie à l'avant, allongée à l'arrière.

2° *Ascension d'une bulle gazeuse au sein d'un liquide.* — Mêmes remarques. La circulation est beaucoup plus visible, à cause de la faible viscosité du gaz; la déformation est en poire, aplatie à l'arrière (en bas) et allongée à l'avant (en haut), parce qu'il faut changer le signe de la pression due à la tension superficielle.

La condition d'adhérence ne traduit ici que très imparfaitement la réalité, et le mouvement réel est beaucoup plus compliqué.

72. Sphère. Translation alternative. — Nous supposerons l'amplitude du mouvement de la sphère, très petite par rapport à son diamètre. Prenant toujours le centre de la sphère pour origine des coordonnées, on peut prendre

$$\psi = \frac{A + Be^{\beta r}}{r}e^{\theta t},$$

avec

$$\mu\beta^2 - \rho\theta = 0,$$

d'où

$$u = \frac{xz}{r^3}e^{\theta t}\left[\frac{3A}{r^2} + Be^{\beta r}\left(\frac{3}{r^2} - \frac{3\beta}{r} + \beta^2\right)\right],$$
$$v = \frac{yz}{r^3}e^{\theta t}\left[\frac{3A}{r^2} + Be^{\beta r}\left(\frac{3}{r^2} - \frac{3\beta}{r} + \beta^2\right)\right],$$

([1]) *Phil. Trans.*, 1894. — LAMB, *Hydrodynamics*, p. 264.

et

$$w = \frac{z^2}{r^2} e^{\theta t}\left[\frac{3A}{r^2} + Be^{\beta r}\left(\frac{3}{r^2} - \frac{3\beta}{r} + \beta^2\right)\right] - e^{\theta t}\left[\frac{A}{r^3} + Be^{\beta r}\left(\frac{\beta^2}{r} - \frac{\beta}{r^2} + \frac{1}{r^3}\right)\right],$$

$$p = +\rho\theta e^{\theta t}.A\frac{z}{r^3},$$

dont on ne doit prendre que les parties réelles.

La vitesse à l'infini est nulle lorsqu'on choisit la racine β, dont la partie réelle est négative.

A la surface de la sphère, $r = R$, la vitesse est

$$o, \quad o, \quad We^{\theta t},$$

si A et B sont déterminés par

$$3A + Be^{\beta R}(3 - 3\beta R + \beta^2 R^2) = o,$$
$$A + Be^{\beta R}(1 - \beta R + \beta^2 R^2) + WR^3 = o,$$

d'où l'on tire

$$A = \frac{W}{2}\frac{R}{\beta^2}(3 - 3\beta R + \beta^2 R^2),$$
$$B = -\frac{3W}{2}\frac{Re^{-\beta R}}{\beta^2}.$$

La formule générale fournit facilement l'expression de la résistance du fluide. La composante suivant l'axe des z, le long du parallèle dont la distance polaire est ζ, est

$$Z = -\frac{W}{2}e^{\theta t}\left\{\begin{aligned}&\frac{\rho\theta}{\beta^2 R}(3 - 3\beta R + \beta^2 R^2)\cos^2\zeta\\ &+\mu\frac{(\beta R - 1)}{R}(2\cos^2\zeta - 1)\end{aligned}\right\},$$

d'où

$$\mathcal{R} = 2\pi R^2\int_0^\pi Z\sin\zeta\, d\zeta = -We^{\theta t}\mu\frac{2\pi R}{3}(4 - 4\beta R + \beta^2 R^2),$$

dont il faut prendre seulement la partie réelle.

73. Discussion. — 1° *Mouvement amorti sans oscillation.* — θ est réel et négatif,

$$\theta = -\theta_1, \qquad \beta = \sqrt{\frac{\rho}{\mu}\theta_1}.i,$$

$$\mathcal{R} = -We^{-\theta_1 t}\mu\frac{2\pi R}{3}\left(4 - \frac{\rho\theta_1 R^2}{\mu}\right).$$

La résistance est proportionnelle à la vitesse actuelle.

2° *Mouvement périodique entretenu :*

$$\theta = i\theta_2, \qquad \beta = -\sqrt{\frac{\rho}{\mu}\theta_2}\,\frac{1+i}{\sqrt{2}},$$

$$\mathcal{R} = -W\mu\frac{2\pi R}{3}\left\{\begin{array}{l} 4\cos\theta_2 t\left(1+R\sqrt{\dfrac{\rho\theta_2}{2\mu}}\right) \\ -\sin\theta_2 t\left(4R\sqrt{\dfrac{\rho\theta_2}{2\mu}}+R^2\dfrac{\rho\theta_2}{\mu}\right)\end{array}\right\},$$

correspondant à la vitesse $W\cos\theta_2 t$.

La résistance n'a pas même phase que la vitesse. On peut dire qu'elle se compose d'une partie proportionnelle à la vitesse et d'une autre proportionnelle à l'accélération.

3° *Mouvement périodique amorti :*

$$\theta = \theta_0 e^{\alpha i}, \qquad \beta = -\sqrt{\frac{\rho\theta_0}{\mu}}\,e^{\frac{1}{2}\alpha i}, \qquad \frac{\pi}{2} \leqq \alpha \leqq \pi,$$

$$\mathcal{R} = -W\mu\frac{2\pi R}{3}\left\{\begin{array}{l} \cos(t\theta_0\sin\alpha)\left(4+4R\sqrt{\dfrac{\rho\theta_0}{\mu}}\cos\dfrac{\alpha}{2}+R^2\dfrac{\rho\theta_0}{\mu}\cos\alpha\right) \\ -\sin(t\theta_0\sin\alpha)\left(4R\sqrt{\dfrac{\rho\theta_0}{\mu}}\sin\dfrac{\alpha}{2}+R^2\dfrac{\rho\theta_0}{\mu}\sin\alpha\right)\end{array}\right\}e^{t\theta_0\cos\alpha},$$

avec une vitesse $We^{t\theta_0\cos\alpha}\cos(t\theta_0\sin\alpha)$.

Mêmes remarques que ci-dessus.

Si l'amortissement est faible, α diffère peu de $\frac{\pi}{2}$, et l'on peut poser

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \varepsilon,$$

$$\sin\alpha = 1 - \frac{\varepsilon^2}{2}, \qquad \cos\alpha = -\varepsilon,$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon^2}{8}\right), \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon^2}{8}\right),$$

d'où, en première approximation,

$$\mathcal{R} = -W\mu\frac{2\pi R}{3}e^{-t\theta_0\varepsilon}\left\{\begin{array}{l} \cos(t\theta_0).\left[4+4R\sqrt{\dfrac{\rho\theta_0}{2\mu}}-\varepsilon\left(2R\sqrt{\dfrac{\rho\theta_0}{2\mu}}+R^2\dfrac{\rho\theta_0}{\mu}\right)\right] \\ -\sin(t\theta_0).\left(4R\sqrt{\dfrac{\rho\theta_0}{2\mu}}+R^2\dfrac{\rho\theta_0}{\mu}+\varepsilon.2R\sqrt{\dfrac{\rho\theta_0}{2\mu}}\right)\end{array}\right\},$$

avec une vitesse $We^{-t\theta_0\varepsilon}\cos(t\theta_0)$.

Pendule. — Ces formules permettent d'écrire l'équation du mouvement d'un pendule pesant à boule sphérique oscillant à faible amplitude dans un liquide. Le déplacement z qui correspond à cette

vitesse est

$$z = \frac{W}{\theta_0} e^{t\theta_0 \cos\alpha} \cos(t\theta_0 \sin\alpha - \dot{\alpha}).$$

Soient :

T la période d'oscillation libre dans le vide;
M la masse de la sphère;
m la masse du fluide déplacé;

l'équation du mouvement est

$$M\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \mathcal{R} + \frac{4\pi^2}{T^2}(M - m)z = 0,$$

et, si l'on écrit la résistance sous la forme $\mathcal{R} = -W(A_1 + iA_2)e^{\theta t}$, θ est déterminé par

$$(1) \qquad M\theta^2 + (A_1 + iA_2)\theta + \frac{4\pi^2}{T^2}(M - m) = 0,$$

et réciproquement, de l'observation de θ cette équation permet de tirer $A_1 + iA_2$:

$$A_1 = -M\theta_0\cos\alpha - \frac{4\pi^2}{T^2}(M - m)\frac{\cos\alpha}{\theta_0},$$

$$A_2 = -M\theta_0\sin\alpha + \frac{4\pi^2}{T^2}(M - m)\frac{\sin\alpha}{\theta_0}.$$

Des expressions développées de A_1 et de A_2, on déduit deux équations indépendantes du second degré en $\sqrt{\mu}$, faciles à résoudre, et qui fournissent un contrôle. Mais si l'on n'a déterminé que la période et non l'amortissement, bien que cela suffise à la rigueur, la résolution est pénible et sans précision.

Pour calculer θ à l'avance, remplaçons-le par sa valeur $\frac{\mu\beta^2}{\rho}$, et $\mathcal{R}$ par sa valeur développée, l'équation (1) devient

$$\frac{M\mu^2}{\rho^2}\beta^4 + \frac{2\pi}{3}R\frac{\mu^2}{\rho}\beta^2(4 - 4\beta R + \beta^2 R^2) + \frac{4\pi^2}{T^2}(M - m) = 0.$$

L'équation, étant du quatrième degré en β, a quatre racines imaginaires conjuguées deux à deux; il y a donc *deux* périodes propres distinctes, douées chacune d'un amortissement particulier. On remarquera l'augmentation d'inertie $\frac{2\pi R^3\rho}{3}$ ou $\frac{m}{2}$ dans le coefficient de β^4, signalée pour la première fois par Poisson.

CHAPITRE V.

MOUVEMENTS DE ROTATION.

74. Équations du problème. — Les expériences de rotation lente d'un corps de révolution ne mettent évidemment pas d'inégalité notable de pression en jeu; la densité et la pression peuvent être regardées comme les mêmes qu'au repos. Les équations du mouvement se réduisent donc à

$$(\mathrm{I}) \qquad \frac{\mu}{\rho}\Delta u = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \frac{\mu}{\rho}\Delta v = \frac{\partial v}{\partial t}, \quad \frac{\mu}{\rho}\Delta w = \frac{\partial w}{\partial t};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Prenant l'axe des z comme axe de révolution, et supposant que le mouvement du fluide se fait suivant des parallèles, on peut poser

$$(\mathrm{II}) \qquad u = -\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad w = 0, \quad \omega = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r},$$

ce qui donne

$$(\mathrm{III}) \qquad \frac{\mu}{\rho}\Delta\psi - \frac{\partial\psi}{\partial t} = f(z, t),$$

f étant une fonction arbitraire de z et t seuls et ψ une fonction de z, t et $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Le long de la paroi fixe de révolution la vitesse tangentielle, qui est donnée par $\frac{\partial\psi}{\partial r}$, est nulle.

Le long du corps de révolution en mouvement, avec la vitesse angulaire ω, dont la vitesse tangentielle est ωr, on a

$$(\mathrm{IV}) \qquad \frac{\partial\psi}{\partial r} = \omega r.$$

Lorsqu'on aura intégré l'équation en ψ en tenant compte des con-

ditions aux limites et de l'expression de ω en t, on en tirera facilement le couple qu'exerce le liquide sur le solide.

75. **Couple**. — Considérons un élément de surface, dont la normale fait l'angle γ avec Oz, et, puisque tout est symétrique autour de l'axe, prenons son plan méridien comme plan Oxz ($x = r$, $y = 0$). La composante parallèle à Oy, qui seule intervient dans le couple, est

$$Y = \mu\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)\sin\gamma + \mu\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial z}\cos\gamma$$

avec

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{x}{r},$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{x^2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right),$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{y^2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right).$$

D'où, ici,

$$Y = \mu r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\sin\gamma + \mu\frac{\partial^2\psi}{\partial r\,\partial z}\cos\gamma.$$

L'élément de méridienne a pour longueur

$$ds = -\frac{dz}{\sin\gamma} = \frac{dr}{\cos\gamma}.$$

La surface de la couronne, tout entière à la distance r, sur laquelle une force tangentielle égale à Y produit son couple, est donc

$$dS = -2\pi r\frac{dz}{\sin\gamma} = 2\pi r\frac{dr}{\cos\gamma}.$$

Le couple correspondant sur la paroi est

$$\text{(V)}\qquad dC = -\mu.2\pi r^3\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)dz + \mu.2\pi r^2\frac{\partial^2\psi}{\partial r\,\partial z}dr,$$

le premier terme est le couple exercé sur l'anneau cylindrique de hauteur dz, et le second sur l'anneau plan de largeur dr, qui sont les projections de l'anneau réel.

Pour intégrer, on se rappellera que, le long du corps, z et r sont liés par l'équation

$$z = \mathcal{F}(r)$$

qui définit la méridienne; c'est une simple quadrature qu'il faut effectuer.

Des transformations simples donnent, en utilisant l'équation (III),

$$dC = 2\pi\mu r^2 \left[2\omega\, dz - \frac{\rho}{\mu}\frac{\partial\psi}{\partial t}\, dz - \frac{\rho}{\mu} f(z,t)\, dz + d(\psi'_z) \right].$$

En général, le couple ne dépend pas uniquement de la vitesse angulaire.

76. Équation de la vitesse angulaire. — Si l'on prend comme inconnue la vitesse angulaire $\omega = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}$, l'équation à intégrer, en coordonnées cylindriques, r, z, est

$$(\text{III}') \qquad \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial r^2} + \frac{3}{r}\frac{\partial\omega}{\partial r} + \frac{\partial^2\omega}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial\omega}{\partial t}$$

et le couple élémentaire, subi par la paroi, a pour valeur

$$(\text{V}') \qquad dC = +2\pi\mu r^3 \frac{\partial\omega}{\partial n}\, ds,$$

ds étant un élément d'arc méridien, et n la normale à cet élément vers l'intérieur du liquide.

I. — ROTATION UNIFORME.

77. Mouvement permanent. — Pour le mouvement permanent, l'équation est

$$\Delta\psi = f(z).$$

C'est la même que celle qui détermine le potentiel newtonien d'une matière distribuée dans l'espace avec la densité $-\frac{1}{4\pi} f(z)$.

En particulier, il y a toute une classe de problèmes pour lesquels la fonction $f(z)$ se réduit à une constante dans toute l'étendue du fluide, tout en satisfaisant aux deux conditions

$$\psi = \omega_1 \frac{r^2}{2} \qquad \text{et} \qquad \psi = \omega_2 \frac{r^2}{2}$$

le long des deux surfaces limites.

78. Cylindre circulaire. — Prenons r et z comme coordonnées,

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = \text{const}.$$

Cylindres indéfinis concentriques :

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 0,$$

$$\psi = ar^2 + b\log r + d,$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} = 2a + \frac{b}{r^2}.$$

Soit ω la vitesse angulaire du cylindre intérieur, R; le cylindre extérieur R′ étant fixe, il vient

$$2a = -\omega\frac{R^2}{R'^2 - R^2}, \qquad b = \omega\frac{R^2R'^2}{R'^2 - R^2};$$

et le couple par unité de hauteur est

$$C = -4\pi\mu R^3\left(\frac{\partial\omega}{\partial r}\right)_R = +4\pi\mu\frac{R^2R'^2}{R'^2 - R^2}\omega.$$

Si R′ est infini,

$$a = 0, \qquad C = 4\pi\mu R^2\omega.$$

Le cylindre peut laisser le liquide éloigné en repos, quand il tourne uniformément, ce qu'il ne pouvait pas faire quand il glissait suivant sa longueur (n° 50).

79. Sphère. — Examinons le cas où la fonction ψ dépend uniquement de la distance du centre

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

on a alors

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} = \text{const.},$$

d'où

$$\psi = ar^2 + \frac{b}{r} + c,$$

$$u = -2ay + \frac{b}{r^3}y,$$

$$v = +2ax - \frac{b}{r^3}x.$$

La vitesse angulaire est

$$\omega = 2a - \frac{b}{r^3}.$$

Si la sphère mobile de rayon R, avec une vitesse angulaire ω_0, est

entourée d'une sphère fixe concentrique de rayon R', on a

$$2a = -\omega_0 \frac{R^3}{R'^3 - R^3}, \qquad b = -\omega_0 \frac{R^3 R'^3}{R'^3 - R^3}$$

et, pour R' infini,

$$2a = 0, \qquad b = -\omega R^3.$$

Le frottement sur la sphère mobile donne un couple

$$C = 6\pi\mu b \int_0^\pi (-\sin^4\theta \, d\cos\theta + \sin^3\theta \cos\theta \, d\sin\theta) = 8\pi\mu b.$$

80. Ellipsoïde de révolution. — Détaillons les indications succinctes données par Kirchhoff dans sa vingt-sixième Leçon de Mécanique.

Considérons un ellipsoïde de révolution

$$(e) \qquad \frac{r^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

et les ellipsoïdes homofocaux

$$(e') \qquad \frac{r^2}{a^2 + u} + \frac{z^2}{c^2 + u} = 1,$$

dont la coordonnée elliptique est u.

On sait que le potentiel newtonien (¹) d'une matière homogène de densité 1, qui remplit l'ellipsoïde (e), est en un point quelconque de l'ellipsoïde e'

$$\varphi = \pi a^2 c \int_u^\infty d\lambda \frac{1 - \dfrac{r^2}{a^2 + \lambda} - \dfrac{z^2}{c^2 + \lambda}}{(a^2 + \lambda)\sqrt{c^2 + \lambda}},$$

en appelant u la racine positive de l'équation e'

$$(1) \qquad u = \tfrac{1}{2}\left[r^2 + z^2 - a^2 - c^2 + \sqrt{(r^2 - z^2 - a^2 + c^2)^2 + 4r^2z^2}\right];$$

et l'on a

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = -2\pi a^2 c r \int_u^\infty \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda)^2\sqrt{c^2 + \lambda}}$$

$$= +2\pi a^2 c r \left(\frac{\sqrt{c^2 + u}}{a^2 + u} + \frac{\operatorname{arc\,tang} \sqrt{\dfrac{c^2 + u}{a^2 - c^2}} - \dfrac{\pi}{2}}{\sqrt{a^2 - c^2}} \right).$$

(¹) Tous les Traités de Mécanique, au Chapitre : *Attraction, Potentiel;* APPELL, t. III.

Si donc on prend

$$\omega = \omega_0 \frac{a^2\left(\sqrt{a^2-c^2}\,\frac{\sqrt{c^2+u}}{a^2+u} - \frac{\pi}{2} + \text{arc tang}\sqrt{\frac{c^2+u}{a^2-c^2}}\right)}{c\sqrt{a^2-c^2} - a^2\left(\frac{\pi}{2} - \text{arc sin}\,\frac{c}{a}\right)},$$

cette vitesse angulaire satisfait à l'équation aux dérivées partielles, se réduit à zéro à distance infinie, et à ω_0 sur l'ellipsoïde e.

Le couple se calcule simplement, en remarquant que dans le mouvement permanent il est le même sur tous les ellipsoïdes homofocaux, et en particulier à l'infini, là où l'ellipsoïde se réduit sensiblement à une sphère.

A ces très grandes distances, on a sensiblement

$$\left.\begin{aligned} &r^2 + z^2 = u \\ &\int_u^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^{\frac{5}{2}}} = +\frac{2}{3}\,\frac{1}{u^{\frac{3}{2}}} \\ &\omega = \omega_0 \frac{a^2\sqrt{a^2-c^2}}{c\sqrt{a^2-c^2} - a^2\left(\frac{\pi}{2} - \text{arc sin}\,\frac{c}{a}\right)} \cdot \frac{2}{3}\,\frac{1}{u^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}\right\} u \text{ très grand,}$$

et, d'après le résultat obtenu pour la sphère,

$$C = 8\pi\mu \frac{a^2\sqrt{a^2-c^2}}{c\sqrt{a^2-c^2} - a^2\left(\frac{\pi}{2} - \text{arc sin}\,\frac{c}{a}\right)} \cdot \frac{2\omega_0}{3}.$$

Espace compris entre deux ellipsoïdes homofocaux $u = 0$ *et* $u = \alpha$, *le premier mobile avec la vitesse* ω_1, *l'autre au repos.* — Comme le problème est un problème de mouvement relatif, il suffit de chercher la relation entre ω_0 et ω_1, qui est évidemment

$$\omega_1 = \omega_0 - \omega_0 \frac{a^2\left(\sqrt{a^2-c^2}\,\frac{\sqrt{c^2+\alpha}}{a^2+\alpha} - \frac{\pi}{2} + \text{arc tang}\sqrt{\frac{c^2+\alpha}{a^2-c^2}}\right)}{c\sqrt{a^2-c^2} - a^2\left(\frac{\pi}{2} - \text{arc sin}\,\frac{c}{a}\right)}.$$

La valeur du couple reste la même; pour l'exprimer en ω_1, il suffit de résoudre l'équation précédente en ω_0 et de porter dans C.

81. Disques. — *Disque animé d'un mouvement de rotation permanent dans un liquide illimité.* — Pour le disque de rayon a, sans épaisseur, il faut annuler c dans les expressions précédentes, ce

qui les simplifie.

$$u = \tfrac{1}{2}\left(r^2 + z^2 - a^2 + \sqrt{(r^2 - a^2 - z^2)^2 + 4r^2 z^2}\right),$$

$$\omega = -\frac{2\omega_0}{\pi}\left(\frac{a\sqrt{u}}{a^2 + u} - \frac{\pi}{2} + \operatorname{arc\,tang}\frac{\sqrt{u}}{a}\right),$$

$$C = -\tfrac{32}{3}\,\mu a \omega_0.$$

Disque dans un vase. — En assimilant le vase à un ellipsoïde homofocal au disque, pour lequel on ait $u = \alpha$, il faut prendre

$$\omega_0 = \frac{\omega_1}{1 + \dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{a\sqrt{\alpha}}{a^2 + \alpha} - \dfrac{\pi}{2} + \operatorname{arc\,tang}\dfrac{\sqrt{\alpha}}{a}\right)}.$$

Si le vase est large et peu profond, l'expression de u montre que α est de même ordre de grandeur que le carré de la distance du disque au fond.

Si le vase est profond, mais de diamètre peu supérieur au disque, α est de même ordre que la différence des carrés des rayons.

82. Disque compris entre deux plans parallèles. — On n'a pas fait encore de calcul rigoureux; nous indiquerons le mode d'approximation adopté par Maxwell, qui convient très bien lorsque les plans sont très rapprochés du disque. Pour l'espace compris entre un disque indéfini ($z = 0$) animé de la vitesse angulaire ω et un plan fixe parallèle ($z = -h$), on a

$$\psi = \frac{\omega}{2} r^2 (z + h)$$

et

$$dC = 2\pi\mu\omega r^3\,dr$$

sur la surface inférieure.

Pour un disque de rayon limité R très grand par rapport à h, le mouvement dans la partie centrale du disque sera le même, le frottement aussi. Si l'on pouvait admettre cette distribution jusqu'au bord, on aurait

$$C = \frac{\pi\mu\omega}{2} R^4$$

pour chacune des faces du disque.

Mais au voisinage du bord, soit libre, soit proche de parois fixes, les surfaces d'égale vitesse angulaire se recourbent pour envelopper le disque; il en résulte un accroissement des glissements près du bord et, par suite, un accroissement de frottement.

Lorsque le disque a un grand diamètre par rapport à l'épaisseur h, la région troublée ne s'étend évidemment qu'à une distance comparable à h, c'est-à-dire petite par rapport au diamètre. Le trouble a alors le même caractère qu'auprès du bord rectiligne d'une lame plane, animée d'un mouvement de translation ωR le long de son bord, la section méridienne de l'ensemble des parois servant à définir le problème de translation. Nous avons vu que dans ce cas l'augmentation du frottement sur la lame plane équivaut à l'addition d'une largeur L, que nous avons calculée pour différents cas (n°s 57, 59, 60, 61) avec mouvement uniforme.

Pour le disque nous ajouterons au couple $\frac{\pi\mu\omega}{2}R^4$ le couple $\delta_1 C = 2\pi\mu\omega R^3 L$ dû à cette longueur supplémentaire, supposé appliqué au bord du disque. C'est du moins ce qu'a fait Maxwell, même dans ses expériences où ce terme correctif a quelquefois dépassé le dixième du terme principal.

83. **Discussion.** — Il y aurait évidemment lieu, tout en conservant la distribution de vitesses définie par le bord rectiligne, d'en améliorer l'application aux disques. Sans entrer dans aucun détail, il est évident que la correction faite par Maxwell est excessive : les excès de frottement relatifs à chaque couronne ont une valeur moindre parce que la longueur de la circonférence est plus petite que celle du bord; leur bras de levier est moindre dans le même rapport; enfin c'est avec la vitesse linéaire de la limite de la région centrale non troublée, mal définie mais plus petite que celle du bord, que doit se faire le raccord. Pour toutes ces raisons il semble que le couple supplémentaire doive être réduit à

$$dC = 2\pi(R-y)^2\left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\mu\omega R}{h}\right)dy,$$

pour chaque couronne dy de rayon $R-y$ (v est la fonction définie dans le problème de mouvement rectiligne correspondant; $y=0$ au bord). On peut même montrer qu'il conviendrait mieux pour le raccordement d'attribuer à chaque zone $(R-y)$ non pas la vitesse de translation du bord ωR, mais celle de la zone elle-même $\omega(R-y)$.

On aurait ainsi

$$dC = 2\pi(R-y)^3\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{v}{R}\right) - \frac{\mu\omega R}{h}\right]dy;$$

d'où

$$\delta_2 C = 2\pi\left[R^2 \int_0^\infty \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\mu\omega R}{h}\right) dy - 3R \int_0^\infty \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\mu\omega R}{h}\right) y\, dy \right.$$
$$\left. + 3 \int_0^\infty \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\mu\omega R}{h}\right) y^2\, dy - \frac{1}{R} \int_0^\infty \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\mu\omega R}{h}\right) y^3\, dy\right],$$

le premier terme de $\delta_2 C$ reproduisant seul la correction de Maxwell, $\delta_1 C$.

Sans pouvoir donner aucun résultat général, on peut penser que le rayon moyen auquel il faut appliquer le frottement supplémentaire est plus près de $R - L$ que de R.

La correction serait ainsi

$$\delta_3 C = 2\pi\mu\omega(R - L)^3 L = \delta_1 C\left(1 - \frac{3L}{R} + \ldots\right).$$

Lorsque la correction de Maxwell dépasse 0,1, $(4L > 0{,}1\,R)$, il est possible qu'elle soit elle-même en excès de plus des $\frac{3}{40}$ de sa valeur. Certainement excessive, elle peut laisser subsister sur C une erreur supérieure au centième.

On doit donc trouver après la correction de Maxwell une valeur trop faible de la viscosité; si on ne la faisait pas, on trouverait une valeur beaucoup trop forte.

84. Suite de la discussion. — Précisons la démonstration : l'équation à satisfaire par la vitesse angulaire est

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{3}{r}\frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} = 0,$$

avec les mêmes conditions pour ω le long de la méridienne des parois que pour la vitesse linéaire u dans les problèmes de translation du chapitre précédent. Près des bords, où r est grand, si ω ne varie pas trop vite dans le liquide, le second terme $\frac{3}{r}\frac{\partial \omega}{\partial r}$ peut être négligé en première approximation. L'équation en ω se réduit à l'équation en u des problèmes de translation, et $\frac{\partial \omega}{\partial n} ds$ à dv.

On a donc bien pour le couple élémentaire

$$dC = 2\pi r^3 \frac{\partial \omega}{\partial n} ds,$$

qui donne pour le couple de correction l'expression désignée plus haut par $\delta_3 C$.

Comme le mouvement ainsi obtenu satisfait exactement aux conditions aux parois, sans satisfaire rigoureusement à l'équation du mouvement du liquide, nous savons (n° 28) que, même en faisant exactement la correction $\delta_3 C$, le couple ainsi calculé serait évalué par excès.

Lorsque le rayon n'est pas très grand, on pourrait augmenter la précision en introduisant l'intégrale précédente dans le terme $\frac{3}{r}\frac{\partial\omega}{\partial r}$, et cherchant un terme complémentaire ω_1 donné par

$$\frac{\partial^2\omega_1}{\partial r^2}+\frac{\partial^2\omega_1}{\partial z^2}=-\frac{3}{r}\frac{\partial\omega}{\partial r},$$

dans tout l'espace occupé par le liquide, avec ω nul sur tout le contour et à l'infini, et calculant ensuite le couple qu'il produit.

II. — ROTATION VARIABLE.

85. Mouvement varié. — Lorsque les mouvements sont suffisamment lents, et lorsque la distance normale des parois mobiles aux parois fixes est assez petite, on peut utiliser les intégrales relatives au mouvement permanent pour la solution du mouvement varié. Car, en posant

$$\psi = \Psi e^{\theta t},$$

l'équation

$$\Delta\Psi-\left(\frac{\theta\rho}{\mu}\right)\Psi=0$$

admet comme première approximation l'intégrale de

$$\Delta\Psi_0=0,$$

pourvu que la longueur $\sqrt{\frac{\mu}{\theta\rho}}$ soit très grande.

Tels sont les cylindres ou les sphères de rayons peu différents, les disques entre plans parallèles avec ou sans anneaux de garde et, en particulier, les disques de Maxwell (n° 82).

L'expression du couple résistant en fonction de la vitesse est la même que dans l'état permanent.

On aurait une seconde approximation en formant l'intégrale de

$$\Delta\Psi_1 = \frac{\theta\rho}{\mu}\Psi_0,$$

si on savait le faire; celle-ci ayant en facteur $\frac{\theta\rho}{\mu}$, le couple correspondant, qui a en facteur $\mu\omega$, ne dépendrait plus de μ, et serait proportionnel à la dérivée $(\theta\omega)$ de la vitesse par rapport au temps, c'est-à-dire à l'accélération, ainsi qu'à la densité du fluide. Tous ces caractères sont ceux d'un accroissement apparent du moment d'inertie indépendant de la nature du fluide (sauf la densité), de la période et de l'amortissement. Malheureusement, le calcul n'est praticable que pour le cylindre, la sphère et les ellipsoïdes.

86. Cylindre infini. — Les équations

$$\psi_0 = ar^2 + b\log r + d,$$

$$\frac{\partial^2\psi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_1}{\partial r} = \frac{\theta\rho}{\mu}\psi_0$$

donnent

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial r} = \frac{\theta\rho}{\mu}\left(\frac{ar^3}{4} + \frac{d-b}{2}r + \frac{b}{2}r\log r + \frac{b_1}{r}\right),$$

et la vitesse angulaire additionnelle $\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_1}{\partial r}$ doit être *nulle* sur les deux cylindres R, R′, ce qui détermine b_1 et d; en particulier,

$$b_1 = \frac{aR^2R'^2}{4} + \frac{bR^2R'^2}{2(R'^2-R^2)}\log\frac{R'}{R} = -\frac{\omega}{8}\frac{R^4R'^2}{R'^2-R^2} + \frac{\omega}{2}\frac{R^4R'^4}{(R'^2-R^2)^2}\log\frac{R'}{R}.$$

Mais la dérivée de la vitesse complémentaire n'est pas nulle sur ces deux cylindres, en sorte que le couple a la valeur totale

$$C = -4\pi\left\{\frac{R'^2R^2}{R'^2-R^2}\mu\omega + \left[\frac{R^4}{4}\frac{3R'^2-R^2}{R'^2-R^2} - \frac{R^4R'^4}{(R'^2-R^2)^2}\log\frac{R'}{R}\right]\rho\theta\omega\right\},$$

avec

$$\omega = \Omega e^{\theta t}.$$

Lorsque θ est imaginaire, ce sont les parties réelles de ω et de C qui se correspondent.

87. Sphères. Rotation périodique. — Prenons comme variable le rayon émané du centre ι; l'équation rigoureuse est

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\iota^2} + \frac{2}{\iota}\frac{\partial\psi}{\partial\iota} - \frac{\rho}{\mu}\frac{\partial\psi}{\partial t} = f(t),$$

d'où

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial r} - \tau^2(\Psi + C) = 0,$$

en posant

$$\psi = \Psi e^{\theta t}, \qquad \tau^2 = \frac{\rho\theta}{\mu}, \qquad f(t) = C.$$

Introduisons la fonction $r(\Psi + C)$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} r(\Psi + C) = \tau^2 r(\Psi + C),$$

d'où

$$\Psi = -C + \frac{ae^{\tau r} + be^{-\tau r}}{r}$$

et la constante C ne joue aucun rôle; écrivons donc

$$\psi = e^{\theta t}\frac{ae^{\tau r} + be^{-\tau r}}{r}$$

et

$$\Omega = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{ae^{\tau r} + be^{-\tau r}}{r}\right), \qquad \omega = \text{partie réelle de } \Omega e^{\theta t}.$$

Posons

$$\theta = \theta_1 + i\theta_2 = \frac{\mu}{\rho}(\tau_1^2 - \tau_2^2) + i\frac{2\mu}{\rho}\tau_1\tau_2,$$

et soient

$$a = A\cos\alpha + iA\sin\alpha, \qquad b = B\cos\beta + iB\sin\beta,$$

il vient

$$\psi = \frac{e^{\theta_1 t}}{r}[Ae^{\tau_1 r}\cos(\theta_2 t + \tau_2 r + \alpha) + Be^{-\tau_1 r}\cos(\theta_2 t - \tau_2 r + \beta)] + i(\ldots),$$

d'où

$$\omega = \frac{e^{\theta_1 t}}{r^3}\left\{\begin{array}{l} Ae^{\tau_1 r}\,[r\varepsilon\cos(\theta_2 t + \tau_2 r + \alpha + \eta) - \cos(\theta_2 t + \tau_2 r + \alpha)] \\ -Be^{-\tau_1 r}[r\varepsilon\cos(\theta_2 t - \tau_2 r + \beta + \eta) + \cos(\theta_2 t - \tau_2 r + \beta)]\end{array}\right\}$$

en posant

$$\tau_1 + i\tau_2 = \varepsilon e^{\eta i}, \qquad \theta_1 + i\theta_2 = \frac{\mu}{\rho}\varepsilon^2 e^{2\eta i}.$$

Comme cette vitesse ne dépend pas de la latitude, le calcul du couple sur une sphère de rayon R donne, comme dans le cas du mouvement permanent,

$$C = \frac{8\pi\mu}{3}R^4\left(\frac{\partial\omega}{\partial r}\right)_R = \frac{8\pi\mu R^4}{3} \times \text{partie réelle de}\left(\frac{\tau^2\psi - 3\omega}{r}\right);$$

ici

$$C = \frac{8\pi\mu}{3}R^3\left\{-3\omega + \frac{\varepsilon^2 e^{\theta_1 t}}{R}\left[\begin{array}{l}Ae^{\tau_1 R}\cos(\theta_2 t + \tau_2 R + \alpha + 2\eta) \\ + Be^{-\tau_1 R}\cos(\theta_2 t - \tau_2 R + \beta + 2\eta)\end{array}\right]\right\}.$$

On remonte facilement de ω à l'angle de déviation φ;

$$\varphi = \frac{e^{\theta_1 t}}{R^3}\frac{\rho}{\mu\varepsilon^2}\left\{\begin{array}{l} A e^{\tau_1 R}\,[R\varepsilon\cos(\theta_2 t + \tau_2 R + \alpha - \eta) - \cos(\theta_2 t + \tau_2 R + \alpha - 2\eta)] \\ -B e^{-\tau_1 R}[R\varepsilon\cos(\theta_2 t - \tau_2 R + \beta - \eta) + \cos(\theta_2 t - \tau_2 R + \beta - 2\eta)]\end{array}\right\},$$

et, si l'on prend pour origine du temps le moment du passage par l'équilibre ($\varphi = 0$), on a

$$\begin{array}{l} A e^{\tau_1 R}[R\varepsilon\cos(\tau_2 R + \alpha - \eta) - \cos(\tau_2 R + \alpha - 2\eta)] \\ \quad - B e^{-\tau_1 R}[R\varepsilon\cos(\tau_2 R - \beta + \eta) + \cos(\tau_2 R - \beta + 2\eta)] = 0. \end{array}$$

88. Résistance et inertie. — On peut chercher la relation entre C et ω sur une même sphère en fonction du temps seul; en éliminant $e^{\theta_1 t}\cos\theta_2 t$ et $e^{\theta_1 t}\sin\theta_2 t$ entre C, ω et $\frac{d\omega}{dt}$, on obtient une relation linéaire entre ces trois quantités.

On pourrait aussi bien former une relation linéaire entre ω, C et $\frac{dC}{dt}$; mais aucune n'a une forme simple, parce que la dérivation par rapport à t augmente les phases de 2η et multiplie par $\frac{\mu\varepsilon^2}{\rho}$.

Posons

$$\begin{array}{l} \mathcal{R}_1 = A e^{\tau_1 R}\quad [R\varepsilon\cos(\tau_2 R + \alpha + \eta) - \cos(\tau_2 R + \alpha)] \\ \qquad - B e^{-\tau_1 R}\quad [R\varepsilon\cos(\tau_2 R - \beta - \eta) + \cos(\tau_2 R - \beta)], \\ \mathcal{R}_2 = -A e^{\tau_1 R}\quad [R\varepsilon\sin(\tau_2 R + \alpha + \eta) - \sin(\tau_2 R + \alpha)] \\ \qquad - B e^{-\tau_1 R}[R\varepsilon\sin(\tau_2 R - \beta - \eta) + \sin(\tau_2 R - \beta)], \end{array}$$

nous aurons

$$R^3\omega = \mathcal{R}_1 e^{\theta_1 t}\cos\theta_2 t + \mathcal{R}_2 e^{\theta_1 t}\sin\theta_2 t,$$

et, par un calcul facile,

$$e^{\theta_1 t}\cos\theta_2 t = \frac{\mathcal{R}_1\theta_2 - \mathcal{R}_2\theta_1}{(\mathcal{R}_1^2 + \mathcal{R}_2^2)\theta_2}R^3\omega + \frac{\mathcal{R}_2}{(\mathcal{R}_1^2 + \mathcal{R}_2^2)\theta_2}R^3\frac{d\omega}{dt},$$

$$e^{\theta_1 t}\sin\theta_2 t = \frac{\mathcal{R}_2\theta_2 + \mathcal{R}_1\theta_1}{(\mathcal{R}_1^2 + \mathcal{R}_2^2)\theta_2}R^3\omega - \frac{\mathcal{R}_1}{(\mathcal{R}_1^2 + \mathcal{R}_2^2)\theta_2}R^3\frac{d\omega}{dt},$$

et enfin

$$C = \frac{8\pi\mu}{3}R^4\left\{\begin{array}{l} \omega\left\{-3 + \dfrac{R^2\varepsilon^2}{(\mathcal{R}_1^2 + \mathcal{R}_2^2)\theta_2}\left[\begin{array}{r} (\mathcal{R}_1\theta_2 - \mathcal{R}_2\theta_1)\times[\quad A e^{\tau_1 R}\cos(\tau_2 R + \alpha + 2\eta) \\ + B e^{-\tau_1 R}\cos(\tau_2 R - \beta - 2\eta)] \\ +(\mathcal{R}_2\theta_2 + \mathcal{R}_1\theta_1)\times[- A e^{\tau_1 R}\sin(\tau_2 R + \alpha + 2\eta) \\ + B e^{-\tau_1 R}\sin(\tau_2 R - \beta - 2\eta)] \end{array}\right]\right\} \\ + \dfrac{d\omega}{dt}\dfrac{R^2\varepsilon^2}{(\mathcal{R}_1^2 + \mathcal{R}_2^2)\theta_2}\left[\begin{array}{r} \mathcal{R}_2[\quad A e^{\tau_1 R}\cos(\tau_2 R + \alpha + 2\eta) \\ + B e^{-\tau_1 R}\cos(\tau_2 R - \beta - 2\eta)] \\ - \mathcal{R}_1[- A e^{\tau_1 R}\sin(\tau_2 R + \alpha + 2\eta) \\ + B e^{-\tau_1 R}\sin(\tau_2 R - \beta - 2\eta)] \end{array}\right] \end{array}\right\}.$$

Le terme en ω est une résistance proportionnelle à la vitesse; le facteur de $\frac{\partial\omega}{\partial t}$ est un accroissement de moment d'inertie. Tous deux dépendent d'une manière très complexe des circonstances du mouvement.

89. Approximations. — Lorsque l'amortissement est faible, comme il arrive généralement dans les expériences de mesure, 2η est peu supérieur à $\frac{\pi}{2}$; on peut donc poser

$$2\eta = \frac{\pi}{2} + 2\zeta \qquad (\theta_1 < 0)$$

et développer en ζ.

Lorsque l'amortissement est très voisin de l'amortissement critique, apériodique, θ_2 est au contraire très petit, et 2η est peu inférieur à π; on peut poser alors

$$2\eta = \pi - 2\zeta$$

et développer en ζ.

Une autre circonstance peut faciliter également les approximations dans deux cas extrêmes : lorsque la viscosité est grande, la densité petite, la période longue et l'amortissement faible, la longueur $\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ peut être beaucoup plus grande que R ; $R\varepsilon$ est petit, le couple est presque proportionnel à la vitesse, à μ, et au volume de la sphère. Si, au contraire, la viscosité est faible, la densité grande, la période très courte ou l'amortissement très rapide, la longueur $\frac{1}{\varepsilon}$ peut être beaucoup plus petite que le rayon R, le couple dépend surtout du terme en ε^2; il dépend à la fois de la vitesse et de l'accélération dans des proportions comparables.

Supposons réunies, comme il arrivera souvent, les deux circonstances d'une viscosité faible telle que $R\varepsilon$ soit grand, et d'un amortissement faible tel que $\eta - \frac{\pi}{4} = \zeta$ soit petit.

On a alors, en négligeant ζ,

$$\mathcal{R}_1^2 + \mathcal{R}_2^2 = R^2\varepsilon^2[A^2e^{2\tau_1 R} + B^2e^{-2\tau_1 R} - 2AB\cos(2\tau_2 R + \alpha - \beta)]$$

dans l'expression des coefficients de C,

$$C = \frac{4\pi\mu\sqrt{2}}{3}R^4\varepsilon\left[\omega\frac{A^2e^{2\tau_1 R} - B^2e^{-2\tau_1 R} + 2AB\sin(2\tau_2 R + \alpha - \beta)}{A^2e^{2\tau_1 R} + B^2e^{-2\tau_1 R} - 2AB\cos(2\tau_2 R + \alpha - \beta)}\right.$$
$$\left. + \frac{\partial\omega}{\theta_2\,\partial t}\,\frac{A^2e^{2\tau_1 R} - B^2e^{-2\tau_1 R} - 2AB\sin(2\tau_2 R + \alpha - \beta)}{A^2e^{2\tau_1 R} + B^2e^{-2\tau_1 R} - 2AB\cos(2\tau_2 R + \alpha - \beta)}\right],$$

et, si l'on adopte la même approximation dans le choix de l'origine du temps,

$$C = \frac{4\pi\sqrt{2}}{3} \frac{R^4 \mu\varepsilon}{\sin(2\tau_2 R + \alpha - \beta)}$$
$$\times \left\{ \begin{array}{l} \omega\left[-\cos(\alpha+\beta) + 2\cos\left(\tau_2 R + \alpha - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\tau_2 R - \beta + \frac{\pi}{4}\right)\right] \\ + \frac{\partial\omega}{\theta_2 \partial t}\left[-\cos(\alpha+\beta) - 2\cos\left(\tau_2 R + \alpha - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\tau_2 R - \beta + \frac{\pi}{4}\right)\right] \end{array} \right\},$$

on remarquera comment les deux termes dépendent de μ : le premier a en facteur $\mu\varepsilon$ ou sensiblement $\sqrt{\frac{\mu\rho 2\pi}{T}}$, le second $\frac{\mu\varepsilon}{\theta_2}$ ou $\sqrt{\frac{\mu\rho T}{2\pi}}$.

En outre, à cause du facteur $\tau_2 R$, le rapport des deux termes varie périodiquement avec $\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ lorsqu'on conserve la période et l'amortissement, c'est-à-dire θ_1 et θ_2.

Si, malgré la petitesse de la viscosité, $R\varepsilon$ est petit par suite de la petitesse de R et de la longueur de la période, l'amortissement étant toujours petit $\left(\eta = \frac{\pi}{4}\right)$; on obtient la forme très simple

$$C = -\frac{8\pi\mu R^3}{3}\left(3\omega + \frac{R^2\varepsilon^2}{\theta_2}\frac{\partial\omega}{\partial t}\right),$$

l'augmentation d'inertie est indépendante de la viscosité à égalité de période (θ_2).

90. Liquide indéfini extérieur à la sphère (1). — La vitesse angulaire et le couple doivent être nuls pour R infini, ce qui exige

$$A = 0.$$

On a alors, sur la sphère mobile,

$$\varphi = -\frac{e^{\theta_1 t}}{R^3}\frac{\rho}{\mu\varepsilon^2} B e^{-\tau_1 R}[R\varepsilon\sin(\tau_2 R - \beta + \eta) + \sin(\tau_2 R - \beta + 2\eta)]\sin\theta_2 t$$

avec

$$R\varepsilon\cos(\tau_2 R - \beta + \eta) + \cos(\tau_2 R - \beta + 2\eta) = 0,$$

(1) Pour la théorie, *voir* : LAMPE, *Prog des Gymn.* Dantzig, 1866. — KLEMENCIC, *Wien Ber.*, t. LXXXIV (Abt. II), 1882, p. 146. — LAMPEL, *Wien Ber.* (Abt. II), t. XCIII, 1886, p. 291. — KÖNIG, *Wied. Ann.*, t. XXXII, 1887, p. 193.

et

$$C = \frac{8\pi\mu}{3} R e^{\theta_1 t - \tau_1 R} B \left\{ \begin{array}{l} [R^2\varepsilon^2 \cos(\tau_2 R - \beta - 2\eta) + 3 R\varepsilon \cos(\tau_2 R - \beta - \eta) \\ \qquad + 3\cos(\tau_2 R - \beta)] \cos\theta_2 t \\ + [R^2\varepsilon^2 \sin(\tau_2 R - \beta - 2\eta) + 3 R\varepsilon \sin(\tau_2 R - \beta - \eta) \\ \qquad + 3\sin(\tau_2 R - \beta)] \sin\theta_2 t. \end{array} \right\}.$$

C'est le cas des expériences de König et de Whetham.

91. Liquide intérieur à la sphère [1]. — La vitesse angulaire doit rester finie et le couple nul au centre de la sphère. Reprenons la forme exponentielle. L'intégrale

$$\omega = \frac{e^{\theta t}}{\iota^3}[a e^{\tau\iota}(\tau\iota - 1) - b e^{-\tau\iota}(\tau\iota + 1)]$$

donne en développant

$$\omega = \frac{e^{\theta t}}{\iota^3}\left[-(a+b)\left(1 - \frac{\tau^2\iota^2}{2}\right) + (a-b)\frac{\tau^3\iota^3}{2} + \ldots\right].$$

La condition est donc

$$a + b = 0$$

ou

$$A = -B, \qquad \alpha = \beta,$$

et la vitesse angulaire au centre est la partie réelle de $a\tau^3 e^{\theta t}$ ou

$$\omega_0 = A\varepsilon^3 e^{\theta_1 t}\cos(\theta_2 t + \alpha + 3\eta);$$

près du centre, le couple se réduit à

$$C_0 = -\frac{8\pi\mu\iota^3}{3} A\varepsilon^3 e^{\theta_1 t}\cos(\theta_2 t + \alpha + 3\eta)$$

et s'annule au centre.

A la surface de la sphère le couple est

$$C = \frac{8\pi\mu}{3} A e^{\theta_1 t} \left\{ \begin{array}{l} e^{\tau_1 R}[3\cos(\theta_2 t + \tau_2 R + \alpha) - 3R\varepsilon\cos(\theta_2 t + \tau_2 R + \alpha + \eta) \\ \qquad + R^2\varepsilon^2\cos(\theta_2 t + \tau_2 R + \alpha + 2\eta)] \\ - e^{-\tau_1 R}[3\cos(\theta_2 t - \tau_2 R + \alpha) + 3R\varepsilon\cos(\theta_2 t - \tau_2 R + \alpha + \eta) \\ \qquad + R^2\varepsilon^2\cos(\theta_2 t - \tau_2 R + \alpha + 2\eta)] \end{array} \right\},$$

et, d'après le choix de l'origine du temps α, est donné par

$$\tan\alpha = \frac{e^{\tau_1 R}[R\varepsilon\cos(\tau_2 R - \eta) - \cos(\tau_2 R - 2\eta)] + e^{-\tau_1 R}[R\varepsilon\cos(\tau_2 R + \eta) + \cos(\tau_2 R + 2\eta)]}{e^{\tau_1 R}[R\varepsilon\sin(\tau_2 R - \eta) - \sin(\tau_2 R - 2\eta)] - e^{-\tau_1 R}[R\varepsilon\sin(\tau_2 R + \eta) + \sin(\tau_2 R + 2\eta)]}.$$

---

[1] Pour la théorie, *voir* HELMHOLTZ, *Abh.*, t. I, p. 196 (1860).

C'est le cas des expériences d'Helmholtz et de Piotrowsky.

S'il y avait glissement à la paroi, cela ne changerait rien à l'expression du couple; mais c'est sur une sphère de rayon $R_1 = R + \frac{\mu}{f}$ que se produirait l'entraînement complet; c'est ce rayon R_1 qu'il faudrait mettre dans l'équation qui détermine α.

On voit combien ces relations sont compliquées, et quelle incertitude le calcul des expériences laissera planer sur la valeur de $\frac{\mu}{f}$, qu'elles sont destinées à donner.

92. Intégrale générale en coordonnées cylindriques. — L'équation (III) (n° 74, f arbitraire)

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - \frac{\rho}{\mu}\frac{\partial\psi}{\partial t} = f(z, t)$$

admet comme intégrales simples les fonctions

$$\psi_0 = (a_0 r^2 + b_0 \log r + c_0) e^{\theta t + \zeta z}, \qquad \zeta^2 = \frac{\rho\theta}{\mu},$$

et

$$\psi_\lambda = [a_\lambda + A_\lambda J_0(i\lambda r) + A'_\lambda J_0(i\lambda r)] e^{\theta t + \zeta z}, \qquad \lambda^2 = \zeta^2 - \frac{\rho\theta}{\mu};$$

où toutes les constantes a_0, b_0, c_0, a_λ, A_λ, A'_λ peuvent être imaginaires, ainsi que θ, ζ, λ, qui sont liées par les équations écrites en marge.

$J_0(i\lambda r)$ est la fonction de Bessel dont les premiers termes du développement en série sont

$$J_0(i\lambda r) = 1 + \left(\frac{\lambda r}{2}\right)^2 + \left(\frac{\lambda^2 r^2}{2.4}\right)^2 + \left(\frac{\lambda^3 r^3}{2.4.6}\right)^2 + \ldots$$

et qui, aux grandes valeurs de $i\lambda r$, se rapproche très vite de

$$J_0(i\lambda r) = \sqrt{\frac{-2i}{\pi\lambda r}} \cos\left(\frac{\pi}{4} - i\lambda r\right) + \ldots$$

lorsque la partie réelle de $i\lambda r$ est positive, et de

$$J_0(i\lambda r) = i\sqrt{\frac{-2i}{\pi\lambda r}} \cos\left(\frac{\pi}{4} + i\lambda r\right) + \ldots$$

lorsque la partie réelle de $i\lambda r$ est négative (JORDAN, *Analyse*, t. III, p. 274).

C'est celle qu'il convient de prendre pour l'intérieur d'un cylindre, atteignant l'axe, car elle reste finie à l'origine.

$\mathcal{J}_0(i\lambda r)$ est la fonction qui devient nulle à l'infini [1] mais infinie à l'origine,

$$\mathcal{J}_0(i\lambda r) = J_0(i\lambda r)[\log(i\lambda r) - 0{,}11593\ldots] - \left[\left(\frac{\lambda r}{2}\right)^2 + \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\lambda^2 r^2}{2.4}\right)^2 + \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{\lambda^3 r^3}{2.4.6}\right)^2 + \ldots\right].$$

Pour de grandes valeurs de $i\lambda r$, à partie réelle positive, elle se rapproche très vite de

$$\mathcal{J}_0(i\lambda r) = -\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{-2i}{\pi\lambda r}}\sin\left(\frac{\pi}{4} - i\lambda r\right)$$

et de

$$\mathcal{J}_0(i\lambda r) = -\frac{\pi i}{2}\sqrt{\frac{-2i}{\pi\lambda r}}\sin\left(\frac{\pi}{4} + i\lambda r\right)$$

lorsque la partie réelle de $i\lambda r$ est négative. $\mathcal{J}_0$ convient à l'extérieur d'un cylindre qui contient une source, car elle s'annule à l'infini, grâce au choix de la constante $0{,}11593\ldots$.

Il en existe des tables pour les valeurs réelles de $i\lambda r$, ou imaginaires pures, ou de la forme $(1 - i)x$. Ces dernières ont été calculées à l'occasion du problème de la distribution des courants à longue période dans les fils cylindriques, problème analytiquement semblable à celui de l'entraînement d'un fluide visqueux intérieur au vase cylindrique par les oscillations tournantes du vase; la vitesse angulaire $\omega = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}$ correspond à la densité de courant, multipliée par 2π; mais le couple ne correspond pas à la résistance électrique.

Comme caractères généraux nous n'avons rien à apprendre de plus que par les mouvements des plans, et l'insuffisance des tables numériques ne permet pas d'application expérimentale simple (*voir* Gray et Mathews, *Treatise on Bessel functions and their applications to Physics*, Chap. XI, XII, XIII) (Tables étendues à la fin).

93. Cylindre indéfini. — Le cas le plus simple est celui du cylindre indéfini

$$\zeta = 0, \qquad \lambda^2 = -\frac{\rho\theta}{\mu}, \qquad i\lambda = \tau \quad \text{du problème sphérique.}$$

---

[1] La multiplicité et la confusion des notations pour la seconde intégrale [Y, $\mathfrak{J}$, K. $\overline{K}$, ...] et la variété de choix de celle-ci, m'ont décidé à adopter la notation $\mathcal{J}_0$ pour celle qui s'annule à l'infini, en devenant infinie à l'origne.

L'intégrale

$$\psi = [+ A J_0(\tau r) + A' \mathcal{J}_0(\tau r)] e^{\theta t}$$

donne un couple par unité de hauteur,

$$C = + 2\pi\mu R^2 (2\omega - \tau^2 \psi).$$

Deux cas limites sont simples :

1° Le rayon R est petit par rapport à la longueur $\frac{1}{\varepsilon}$ (n° 89). On a alors sensiblement

$$J_0 = 1 - \frac{\tau^2 r^2}{4} = 1 - \frac{\rho\theta_1}{\mu} \frac{r^2}{4} - i \frac{\rho\theta_2}{\mu} \frac{r^2}{4}$$

et

$$\mathcal{J}_0 = J_0 [\log(\varepsilon r) - 0,11593 + i\eta] + \frac{\rho\theta_1}{\mu} \frac{r^2}{4} + i \frac{\rho\theta_2}{\mu} \frac{r^2}{4},$$

$$\omega = \left\{ - A \frac{\tau^2}{2} + A' \left[\frac{1}{r^2} + \frac{\tau^2}{4} - \frac{\tau^2}{2} (\log \varepsilon r - 0,11593 + i\eta) \right] \right\} e^{\theta t};$$

2° Le rayon R est très grand :

$$J_0 = \sqrt{\frac{2}{\pi \tau r}} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \tau r\right),$$

$$\mathcal{J}_0 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi \tau r}} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \tau r\right),$$

la partie réelle de τr étant prise positive.

94. Distribution arbitraire le long d'une génératrice. — L'intégrale générale

$$\psi = ar^2 + b \log r + \Sigma (A_n \sin \lambda_n z + B_n \cos \lambda_n z) J_0(i\lambda_n r)$$
$$+ \Sigma (A'_n \sin \lambda_n z + B'_n \cos \lambda_n z) \mathcal{J}_0(i\lambda_n r)$$

peut satisfaire à telle distribution de vitesses angulaires que l'on veut, le long d'une génératrice.

Lorsque le liquide est contenu dans le cylindre, on doit prendre les J_0 seuls.

Lorsque le liquide est extérieur au cylindre et s'étend à l'infini, on doit prendre les $\mathcal{J}_0$ seuls.

Lorsque les deux cylindres ont des rayons comparables, il faut conserver les deux fonctions.

Soit R′ le rayon du cylindre immobile; on doit avoir, quel que soit z,

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}\right)_{r=R'} = 0,$$

d'où

$$b = -2aR'^2,$$

$$\left.\begin{aligned} A_n\left(\frac{\partial J_0}{\partial r}\right)_{R'} + A'_n\left(\frac{\partial J_0}{\partial r}\right)_{R'} &= 0 \\ B_n\left(\frac{\partial J_0}{\partial r}\right)_{R'} + B'_n\left(\frac{\partial J_0}{\partial r}\right)_{R'} &= 0 \end{aligned}\right\} \lambda_n qcq.$$

On peut ensuite satisfaire à telle condition que l'on veut en z, soit par une série de Fourier procédant suivant les multiples de $2\pi : h$, lorsque la hauteur totale h du cylindre liquide est limitée, soit par une intégrale lorsque la hauteur est illimitée :

$$f(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\zeta)\cos\lambda(z-\zeta)\,d\zeta.$$

Par exemple, pour un *cylindre d'épaisseur* $2e$ prolongé par des *cylindres immobiles*, on aurait

$$z^2 < e^2, \qquad \left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)_R = \omega_0,$$

$$z^2 > e^2, \qquad \left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)_R = 0,$$

qui est donnée par

$$A\left[\frac{\partial J_0(i\lambda r)}{\partial r}\right]_R + A'\left[\frac{\partial J_0(i\lambda r)}{\partial r}\right]_R = 0,$$

$$\frac{B}{R}\left[\frac{\partial J_0(i\lambda r)}{\partial r}\right]_R + \frac{B'}{R}\left[\frac{\partial J_0(i\lambda r)}{\partial r}\right]_R = \frac{2\sin\lambda e}{\lambda\pi}\left[\omega_0 + 2a\frac{R'^2 - R^2}{R^2}\right].$$

Remarque. — La détermination des coefficients A, B, qui conviennent à un corps terminé par des surfaces autres que des plans normaux à l'axe et des cylindres de révolution, est impraticable; mais la voie inverse pourrait peut-être servir à choisir des formes de corps réalisables mécaniquement avec assez de précision.

Quoi qu'il en soit, c'est dans la théorie des disques que nous allons avoir à faire usage de ces intégrales.

95. Disques, mouvement varié. — La théorie de l'entraînement des fluides par les oscillations des disques est beaucoup plus difficile que par les sphères. On n'en connaît que des solutions approchées. La première tentative a été faite par O.-E. Meyer [1] à l'occasion de

[1] *Ueber die Reibung der Flüssigkeiten* (*Journal de Crelle*, t. 59, 1861, p. 229, et t. 62, 1863, p. 201).

ses expériences sur les gaz. Malgré de longs et difficiles calculs, l'approximation resta très grossière; une partie des calculs, relative à l'influence des bords, montre même qu'à cette époque M. Meyer ne se représentait pas correctement la nature de cette influence.

L'année suivante, Maxwell imagina une disposition de disques qui se prête mieux au calcul que celle de Meyer, et en fit la théorie avec une approximation à peu près suffisante (n° **82**).

Après M. Meyer, plusieurs physiciens s'efforcèrent d'améliorer la théorie pour le disque unique; aucun ne réussit à définir mathématiquement un mouvement continu du fluide et à donner autre chose que des indications très grossières et des explications insuffisantes. M. Grossmann, en 1882, par des considérations qui sont en grande partie fausses, ajoute au couple résistant de Meyer, proportionnel à $\sqrt{\rho\mu}$, un couple résistant proportionnel à μ et à la vitesse. Cette correction ramène les valeurs obtenues par les disques à 0,9 environ de celles que donne l'écoulement capillaire, au lieu de 1,5 à 2; c'est le seul argument en sa faveur.

M. König, en 1887, a donné des raisons d'ajouter au couple résistant un couple d'inertie, et il en a donné une valeur approchée, que M. Meyer a confirmée par des considérations plus mathématiques; les nombres que ses anciennes expériences fournissent avec le nouveau mode de calcul sont beaucoup plus réguliers, et peu différents de ceux des autres expérimentateurs. Néanmoins c'est une théorie encore très insuffisante et peu précise.

Le point de départ de tous les travaux sur les disques est le même; il est utile de l'énoncer explicitement. *Le frottement s'exerçant surtout sur les faces planes, si l'on connaissait l'intégrale exacte en coordonnées cylindriques, il suffirait pour le calcul du couple d'utiliser la partie de l'intégrale intérieure au cylindre qui a le disque pour base.* On peut donc concevoir la marche théorique suivante :

Chercher deux solutions pour l'intérieur du cylindre de rayon R satisfaisant aux conditions limites en z, l'une au-dessus, l'autre au-dessous du disque, mais indéterminée le long du cylindre R; chercher une solution pour l'extérieur du cylindre R se raccordant avec les précédentes (et au besoin avec l'épaisseur du disque) le long du cylindre de rayon R, et satisfaisant aux conditions limites.

En fait, on prend une solution très particulière à l'intérieur du cylindre; et l'on en définit très grossièrement le raccord avec une solution extérieure, elle-même tout à fait insuffisante.

Bornons-nous au cas où l'extension du liquide autour du disque est indéfinie.

96. Intérieur du cylindre. — On prend simplement le premier terme ψ_0, qui en tenant compte des conditions limites en z, du côté positif,

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_0}{\partial r} = \omega_0, \qquad z = 0,$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} = 0, \qquad z = +\infty.$$

Conservant les notations employées pour la sphère

$$\tau = \tau_1 + i\tau_2 = \zeta = \varepsilon e^{\eta i}, \qquad \theta = \frac{\mu}{\rho}\varepsilon^2 e^{2\eta i} = \theta_1 + i\theta_2, \qquad \pi > 2\eta > \frac{\pi}{2},$$

on a

$$\psi = \varphi_0 \frac{\mu\varepsilon^2}{2\rho} r^2 e^{\theta t - \tau z + \left(2\eta - \frac{\pi}{2}\right)i}$$

dont la partie réelle est

$$\psi = +\varphi_0 \frac{\mu\varepsilon^2}{2\rho} r^2 e^{\theta_1 t - \tau_1 z} \sin(\theta_2 t - \tau_2 z + 2\eta)$$

avec

$$\varphi = \int_0^t \omega_0\, dt = \varphi_0 e^{\theta_1 t} \sin\theta_2 t,$$

et, à une distance z quelconque

$$C = 2\mu\pi \int_0^R r^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial r\,\partial z}\, dr,$$

$$C = -\varphi_0 \frac{\pi\mu^2\varepsilon^3}{\rho} \frac{R^4}{2} e^{\theta_1 t - \tau_1 z} \sin(\theta_2 t - \tau_2 z + 3\eta).$$

A la surface du disque ($z = 0$),

$$C = \varphi_0 \frac{\pi\mu^2\varepsilon^3}{\rho} \frac{R^4}{2} e^{\theta_1 t} \sin(\theta_2 t + 3\eta).$$

La phase diffère de celle de la vitesse

$$\omega = \varphi_0 \frac{\mu}{\rho} \varepsilon^2 e^{\theta_1 t} \sin(\theta_2 t + 2\eta),$$

et l'inertie du fluide introduit l'augmentation de moment d'inertie dont nous avons déjà parlé.

97. **Rôle du liquide extérieur.** — *Meyer.* — Dans ses premiers Mémoires, M. Meyer se borne à cette approximation, en y ajoutant de très longues considérations pour tenir compte de l'épaisseur du disque, mais si peu justifiées mathématiquement qu'il vaut autant faire franchement l'hypothèse qui résume toutes les approximations partielles, à savoir que l'on doit augmenter le rayon de la moitié de l'épaisseur, pour ramener au cas du disque mince.

C'est avec cette valeur de C que M. Meyer a calculé ses premières expériences et obtenu des nombres très irréguliers.

Grossmann. — M. Grossmann, préoccupé de l'influence du liquide extérieur, en a calculé le rôle d'une manière tout à fait arbitraire.

A l'intérieur du cylindre de rayon R le liquide a le mouvement défini par ψ, et cela jusqu'à la surface $r = R$.

Remarquons que dans ce mouvement chaque couche plane tourne en entier comme une couche solide, il n'y a donc aucun frottement à travers les surfaces cylindriques, mais seulement à travers les surfaces planes.

M. Grossmann (¹) suppose que, sans changer la distribution à l'intérieur du cylindre R, un frottement s'exerce sur sa paroi, et que ce frottement par unité de surface est, pour chaque couche, égal à celui que cette couche subit à travers ses faces planes pour $r = R$, c'est-à-dire à

$$F = \mu R \frac{\partial \omega}{\partial z},$$

ce qui donne, pour le cylindre liquide entier, le couple

$$-\int_0^\infty 2\pi R^2 F \, dz = 2\pi R^3 \mu \omega_{(z=0)}.$$

Il écrit ensuite que la somme des moments des quantités de mouvement du cylindre liquide (calculée avec la distribution par couches planes) est égale au moment du couple exercé par le disque augmenté du moment du couple latéral, et il en déduit le moment du

(¹) *Wied. Ann.*, t. XVI, 1882, p. 619.

couple exercé par le disque.

$$C = \varphi_0 \left[\frac{\pi\mu^2\varepsilon^3}{\rho} \frac{R^4}{2} e^{\theta_1 t} \sin(\theta_2 t + 3\eta) \right.$$
$$\left. - \frac{2\pi\mu^2\varepsilon^2}{\rho} R^3 e^{\theta_1 t} \sin(\theta_2 t + 2\eta) \right]$$

avec nos notations.

Ce qu'il ajoute ainsi, c'est une résistance proportionnelle à la vitesse et à μ, tout à fait arbitraire en réalité.

König. — Beaucoup mieux justifié est le point de vue de M. König (1) : celui-ci, ayant étudié expérimentalement les sphères et constaté l'importance du terme d'inertie additionnelle, fit alors le raisonnement suivant. Le calcul de Meyer donne une première approximation du mouvement comprenant une résistance et une addition d'inertie sur le disque; mais le disque et chaque couche plane liquide doivent subir aussi un accroissement supplémentaire d'inertie provenant des réactions du liquide extérieur au cylindre. M. König tire la valeur de cette réaction d'inertie d'un travail de M. Klemencic (2) sur les cylindres *indéfinis*.

L'augmentation *relative* est

$$\frac{2}{R}\sqrt{\frac{\mu}{\pi\rho}T} \qquad \left(\theta_2 = \frac{2\pi}{T}\right)$$

dans le cas où $(R\varepsilon)$ est grand.

En fait, les viscosités calculées au moyen de cette formule avec des périodes T très différentes concordent suffisamment entre elles et avec celles que donnent les oscillations des sphères et l'écoulement capillaire.

Il semble bien que ce soit la partie importante de l'action du liquide extérieur.

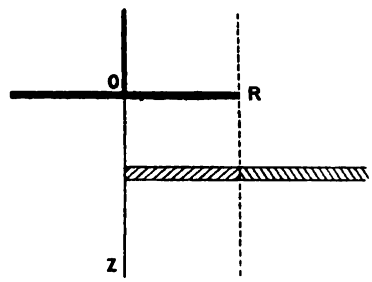
98. Calcul de Meyer. — M. Meyer a bien défini le type approché de mouvement du liquide auquel elle correspond : on obtient cette même correction en découpant le liquide en tranches horizontales et considérant dans chaque tranche le disque intérieur au cylindre R et l'anneau extérieur (*fig.* 16). Pour chaque disque intérieur, on prend comme première approximation le mouvement d'ensemble à vitesse

(1) *W. A.*, t. XXXII, 1887, p. 215.

(2) *Wien. Ber.*, t. LXXXIV (Abt. II), 1882, p. 157.

angulaire uniforme, sous l'influence du frottement des faces planes et d'un frottement latéral (on traite donc $R\varepsilon$ comme petit) avec un facteur $e^{\zeta z}$ à déterminer. Pour chaque anneau extérieur infini, on

Fig. 16.



néglige l'influence mutuelle des faces planes, on adopte, avec le même facteur $e^{\zeta z}$, le type de solution en

$$\sqrt{\frac{2}{\pi\tau r}}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\tau r\right),$$

qui convient aux grandes valeurs de $R\varepsilon$, en assurant la continuité de vitesse et de frottement le long du cylindre R. Chacune de ces deux solutions ne satisfait qu'approximativement à l'équation aux dérivées partielles, puisque, à l'extérieur, le terme en $\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ est effacé, et, à l'intérieur, il est égal à $\zeta^2\psi$ sans que ζ^2 soit égal à τ^2.

On détermine une valeur de ζ^2 intermédiaire entre o et τ^2, qui répartit l'inexactitude entre les deux solutions, de la manière suivante : on écrit l'équation d'oscillation de chaque disque liquide ($r < R$) pris en entier, sous l'influence des disques supérieur et inférieur et de l'anneau extérieur :

$$\mu\pi\frac{R^4}{2}\frac{\partial^2\omega}{\partial z^2}+2\pi\mu R^3\left(\frac{\partial\omega}{\partial r}\right)_R=\frac{\pi R^4}{2}\rho\frac{\partial\omega}{\partial t}.$$

Or, de

$$\psi = A\sqrt{\frac{2}{\pi\tau r}}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\tau r\right),$$

on tire facilement la valeur approximative

$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial r}\right)_R=\omega\tau\,\mathrm{tang}\left(\frac{\pi}{4}-\tau R\right),$$

avec

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}-\tau_1 R - i\tau_2 R\right) = \frac{\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\tau_1 R\right)+i\,\mathrm{Sh}(\tau_2 R)\,\mathrm{Ch}(\tau_2 R)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\tau_1 R\right)\mathrm{Ch}^2\tau_2 R+\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\tau_1 R\right)\mathrm{Sh}^2\tau_2 R},$$

ce qui donne, quel que soit τ_1, pour les grandes valeurs de $\tau_2 R$,

$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial r}\right)_R = i\tau\omega.$$

L'équation des moments devient

$$\mu\left(\zeta^2+\frac{4i\tau}{R}\right) = \rho\theta$$

ou

$$\zeta^2 = \tau^2 - 4i\frac{\tau}{R}.$$

La valeur de ζ ainsi obtenue

$$\zeta = \tau + 2\frac{i}{R}$$

intervient directement dans l'expression du frottement du liquide sur le disque solide, qui lui est proportionnel :

$$C = \varphi_0\frac{\pi\mu^2\varepsilon^2}{\rho}\frac{R^4}{2}\left[\tau_1\sin(\theta_2 t+2\chi_1)+\left(\tau_2+\frac{2}{R}\right)\cos(\theta_2 t+2\chi_1)\right].$$

Le mouvement ainsi défini est un mouvement continu dans lequel les forces sont continues, qui satisfait exactement aux conditions limites et approximativement aux équations de la viscosité interne. S'il s'agissait d'un mouvement permanent, on pourrait affirmer que la dissipation réelle d'énergie est moindre et que la viscosité tirée de là est excessive (n° **28**); pour un mouvement varié, le signe ne peut être défini, mais l'erreur qui reste est probablement petite pour les mouvements lents.

En réalité, c'est en coordonnées elliptiques qu'il faudrait traiter le problème; mais l'intégrale serait alors pratiquement inutilisable, faute de tables, et d'ailleurs difficile, parce que les couches de vitesse angulaire uniforme ne sont pas les ellipsoïdes homofocaux.

99. Amortissement du corps oscillant. — Dans les oscillations amorties d'un corps de révolution quelconque plongé dans un fluide, la réaction du fluide entièrement déterminée par des équations linéaires lorsque le mouvement est assez lent dépend principalement

de la vitesse actuelle du corps; toutefois l'inertie du fluide produit une différence de phase qui ajoute un terme proportionnel à l'accélération.

A l'oscillation

$$\varphi = \varphi_0 e^{\theta_1 t} \sin\theta_2 t \qquad (\theta_1 < 0)$$

du corps, correspond en général un couple ($C > 0$ vers $\varphi > 0$)

$$C = (C_1 e^{\theta_1 t} \sin\theta_2 t + C_2 e^{\theta_1 t} \cos\theta_2 t)\varphi_0;$$

les constantes C_1, C_2 dépendent encore de θ_1 et de θ_2, outre les dimensions géométriques du corps mobile et du vase; ce sont elles qui contiennent la viscosité et la densité du fluide. Le couple étant généralement résistant pendant la plus grande partie de l'oscillation, la constante C_2 est ordinairement négative.

L'expérience consiste à déterminer θ_1 et θ_2, et la première étape de calcul à obtenir C_1, C_2, en fonction de θ_1, θ_2, du moment d'inertie du corps K et de la torsion A du fil de suspension, qui sont liés par l'équation

$$K\frac{d^2\varphi}{dt^2} = C - A\varphi.$$

Or on a

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \varphi_0 e^{\theta_1 t}(\theta_1 \sin\theta_2 t + \theta_2 \cos\theta_2 t),$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \varphi_0 e^{\theta_1 t}[(\theta_1^2 - \theta_2^2)\sin\theta_2 t + 2\theta_1\theta_2 \cos\theta_2 t].$$

L'équation se décompose donc en deux :

$$K(\theta_2^2 - \theta_1^2) + C_1 - A = 0,$$
$$2K\theta_1\theta_2 - C_2 = 0.$$

On a

$$C_2 = 2K\theta_1\theta_2, \qquad C_1 = -K(\theta_2^2 - \theta_0^2 - \theta_1^2),$$

en posant

$$\theta_0^2 = \frac{A}{K}.$$

S'il y a des viscosités accessoires qu'on doive éliminer, elles fournissent deux équations de même forme, avec des coefficients C'_1, C'_2; on a donc, dans une première expérience,

$$C'_2 = 2K\theta'_1\theta'_2, \qquad C'_1 = -K(\theta'^2_2 - \theta_0^2 - \theta'^2_1),$$

et dans la seconde expérience avec les deux causes réunies

$$C_2 + C'_2 = 2K\theta_1\theta_2, \qquad C_1 + C'_1 = -K(\theta_2^2 - \theta_0^2 - \theta_1^2),$$

ce qui donne, par différence, les termes que l'on cherche

$$C_2 = 2K(\theta_1\theta_2 - \theta'_1\theta'_2), \qquad C_1 = -K(\theta_2^2 - \theta_2'^2 - \theta_1^2 + \theta_1'^2).$$

Remarquons que, si le couple est fourni par la théorie sous la forme d'un terme proportionnel à la vitesse $-D_1\frac{d\varphi}{dt}$, et d'un proportionnel à l'accélération $-D_2\frac{d^2\varphi}{dt^2}$, dont les signes sont mis en évidence, on a

$$C_1 = -D_1\theta_1 + D_2(\theta_2^2 - \theta_1^2),$$
$$C_2 = -D_1\theta_2 - 2D_2\theta_1\theta_2,$$

où θ_1 et θ_2 sont les valeurs réalisées dans l'expérience (C'_1 et C'_2 dépendraient de D'_1, D'_2 et de θ'_1, θ'_2 correspondants).

Ce que l'observation donne directement, c'est la durée d'une oscillation (complète) T, et le rapport des élongations successives à droite et à gauche, à une demi-période d'intervalle, $a < 1$, et l'on a

$$\theta_2 = \frac{2\pi}{T}, \qquad \theta_1 = \frac{2}{T}\log \text{nép}(a) = \frac{4{,}605172}{T}\log_{10} a.$$

100. Calcul d'une expérience. — On tire ainsi de l'expérience deux fonctions de μ et de ρ; on connaît généralement ρ par les mesures de pression et de densité; il y a donc une équation de contrôle. La résolution par rapport à μ peut être plus ou moins exacte, plus ou moins pénible, suivant l'exactitude de la théorie que l'on a faite du mouvement du fluide, et la complexicité des formules qui en résultent; mais, comme l'on est en présence d'une équation numérique, il n'y a pas de difficulté réelle; quelques tâtonnements donnent deux valeurs approchées de μ par défaut et par excès, entre lesquelles on peut facilement dresser deux tables : l'une de T, l'autre de a pour un petit nombre de valeurs de μ intermédiaires permettant l'interpolation à vue d'après les nombres observés. La prévision de la forme de θ_1 et de θ_2 en fonction de μ est, au contraire, presque toujours inabordable algébriquement.

101. Périodicité de l'amortissement. — Résolvant en θ_1, θ_2, on obtient

$$\theta_1 = \frac{-D_1}{2(K+D_2)}, \qquad \theta_2^2 = \frac{K}{K+D_2}\theta_0^2 - \frac{D_1^2}{4(K+D_2)^2}.$$

Deux cas extrêmes peuvent se produire suivant que le diamètre du corps oscillant est grand ou petit.

Dans ce dernier cas, D_2 est très petit et indépendant de la viscosité (sphère n° **84**).

Mais dans le premier, D_2, quoique petit, varie avec la viscosité exactement comme D_1 ; θ_1 croît d'abord proportionnellement à $\sqrt{\mu}$, puis de plus en plus lentement; nous savons que les expressions exactes contiennent μ sous les signes sin et cos; θ_1 atteint donc d'abord un maximum pour une valeur finie de μ, puis décroît, passe par un minimum (*voir* n^os **39** et **89**).

M. König a reconnu l'existence du premier maximum sur des valeurs approchées contenant un plus grand nombre de termes que les nôtres et a vérifié expérimentalement son existence. Il ne s'est pas occupé des minimums et des maximums suivants, que son développement approché ne lui avait pas annoncés.

LIVRE II.

LES LIQUIDES.

CHAPITRE I.

EAU.

I. — EXPÉRIENCES DE POISEUILLE.

102. Poiseuille, ancien élève de l'École Polytechnique, professeur de Physique à la Faculté de Médecine de Paris, avait entrepris un ensemble de recherches sur le mouvement du sang dans les vaisseaux capillaires. Il commença par étudier à fond un cas beaucoup plus simple : celui du mouvement de l'eau distillée dans des tubes de verre capillaires. C'est cette étude préliminaire publiée par l'Académie des Sciences dans le *Recueil des savants étrangers,* pour 1842 (année 1846), que nous allons résumer.

Ce Mémoire de Poiseuille, antérieur aux recherches théoriques de Stokes (1851), est excellent de tout point. Poiseuille, formé à l'école de Regnault, a très bien vu et su résoudre les difficultés de la question; les principales sont les suivantes :

1° Mesure exacte du diamètre et de la répartition des sections tout le long du tube:

2° Mesure exacte de la différence des pressions aux deux bouts, différence qu'il faut rendre aussi parfaitement constante que possible.

103. Mesures géométriques. Section du tube. — Poiseuille a utilisé des diamètres compris entre $0^{mm},14$ et $0^{mm},01$; exceptionnellement il a utilisé un diamètre de $0^{mm},6$.

Mais, plus le tube est fin, plus la mesure du diamètre devient difficile avec la précision nécessaire ; car, le débit étant proportionnel à la quatrième puissance du diamètre, l'erreur relative commise sur la mesure du diamètre est multipliée par 4.

En fait, avec des tubes aussi fins que ceux de Poiseuille, les précautions les plus minutieuses ne fournissent pas le diamètre avec une erreur sensiblement moindre que $\frac{1}{100}$, ce qui permet à peine d'atteindre le centième dans l'étude de la loi des diamètres. La mesure du diamètre est donc très délicate si l'on veut vérifier la loi avec une approximation qui ne soit pas trop grossière. Poiseuille a commencé par étudier chaque tube au point de vue de la régularité de la section d'un bout à l'autre du tube ; il faisait, pour cela, glisser dans le tube, selon le procédé de Gay-Lussac, un index de mercure dont il mesurait les variations de longueur. Poiseuille a rejeté tout d'abord les tubes pour lesquels ces variations dépassaient $\frac{1}{50}$; et, parmi les autres, il n'a conservé définitivement que ceux qui se montraient régulièrement coniques. Il connaissait ainsi pour chaque tube conservé la variation du diamètre moyen.

Ce diamètre moyen était ensuite déterminé par des pesées de mercure, en supposant chaque section absolument circulaire. Le tube était rempli de mercure, complètement fermé à un bout, puis vidé dans une capsule tarée ; cette opération était recommencée une dizaine de fois et le poids total du mercure était évalué à l'aide d'une balance Fortin, excellente pour le temps, mais ne donnant que le demi-milligramme ; cette sensibilité, faible pour la précision à obtenir, rendait nécessaires les jaugeages répétés.

Poiseuille se demanda ensuite si les sections de ces tubes, qu'il supposait circulaires pour le calcul des diamètres d'après les pesées, l'étaient suffisamment en effet. Il traça, pour cela, à l'aide d'une chambre claire, les profils des sections terminales du tube examinées au microscope. Dans les séries de recherches où Poiseuille fut amené à couper un même tube en plusieurs morceaux, il profita de cette circonstance pour dessiner de même le profil des sections aux bouts de chaque morceau.

Il reconnut que les tubes, même les plus réguliers, n'ont pas une section circulaire. On peut admettre avec Poiseuille qu'elle est elliptique et prendre pour rayon celui du cercle de même aire que l'ellipse, lorsque l'ellipticité n'atteint pas 0,1 ; la théorie faite ultérieurement par M. Boussinesq justifie cette supposition (n° 67).

Remarque. — Pour l'examen de la section au microscope, on ren-

contre une difficulté à éclairer convenablement le bord du trou. Savart a proposé un procédé qui réussit très bien. Il consiste à faire une coupe mince du tube et à le noyer dans le baume de Canada. Les indices du verre et du baume sont très voisins; cependant ils sont assez différents et surtout la différence d'absorption est assez grande pour que le trou se détache nettement en sombre sur fond brillant. D'ailleurs les indices sont assez voisins pour éliminer presque complètement les réflexions au bord du trou. On obtient ainsi un profil très net, dont la chambre claire permet aisément le tracé sur le papier quadrillé. Un micromètre objectif fait connaître l'échelle du dessin et l'on calcule sans peine l'aire de la section.

Les deux méthodes (microscope et jaugeages au mercure) donnent des résultats qui concordent au $\frac{1}{500}$.

104. Mesure du débit. — Le tube est réglé horizontalement à l'aide d'une lunette.

Pour mesurer le débit la méthode qui paraîtrait la plus simple serait de recueillir dans une éprouvette graduée le liquide qui s'écoule de l'extrémité du tube capillaire dans un temps donné. Mais cette méthode est très défectueuse et Poiseuille y a renoncé parce que, le liquide s'écoulant goutte à goutte, la pression varie beaucoup et d'une manière discontinue quand chaque goutte se forme et se détache. Pour obtenir une pression et un débit réguliers, il est indispensable de noyer le tube dans un vase contenant le même liquide que celui qui s'écoule afin que le liquide sortant du tube pénètre sans discontinuité dans le liquide qui l'entoure. C'est donc à l'entrée du tube capillaire qu'il faudra mesurer le débit. Voici comment Poiseuille a disposé l'appareil à cet effet.

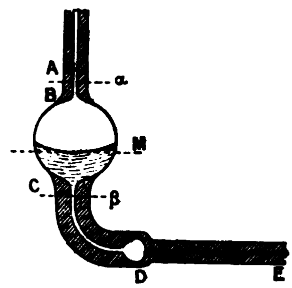
Le tube capillaire DE en expérience est soudé (*fig.* 17) en D à un tube beaucoup plus large, de manière que le tube capillaire soit nettement terminé, condition indispensable pour la mesure précise de sa longueur.

Le tube large communique par un tube étroit recourbé CD, avec une ampoule BC en verre, soufflée aussi régulièrement que possible, et surmontée d'un tube étroit AB de même diamètre intérieur que CD. Deux repères α, β sont tracés sur ces deux parties étroites, à égale distance de l'ampoule: le volume compris entre ces repères est jaugé avec précision par des pesées.

L'ampoule et les tubes étant pleins de liquide, on produit l'écoulement sous une certaine pression. On vise le repère α supérieur

à l'aide d'un microscope à réticule, mobile le long d'une règle verticale et l'on commence à compter les temps quand le niveau du liquide passe en α. L'instant final est déterminé par le moment où

Fig. 17.



le liquide arrive au repère inférieur β que l'on vise de même au microscope. Le volume de liquide écoulé dans le temps considéré est celui qui est compris entre ces repères.

105. **Évaluation de la pression à l'orifice d'entrée.** — La quantité P qui figure dans l'expression du débit est l'excès de la pression à l'orifice d'entrée D du tube capillaire horizontal sur la pression à la sortie. Cette pression n'est pas constante pendant l'écoulement; sa valeur initiale et sa valeur finale diffèrent d'une colonne d'eau à peu près égale à la distance verticale $\alpha\beta$, dont il faut déterminer une valeur moyenne conforme à la nature du phénomène.

Supposons qu'à un moment donné, le ménisque dans l'ampoule soit tangent au plan M; soit ρ la densité absolue de l'eau, h la hauteur verticale de ce plan M au-dessus de l'ouverture du tube capillaire DE.

La pression P en D se compose de trois termes :

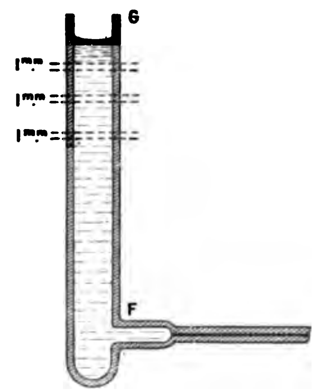
$$P = p + gh\rho - C;$$

p est la pression au niveau M de l'air qui surmonte l'eau dans l'ampoule; $gh\rho$ représente la pression hydrostatique de la colonne d'eau comprise entre M et D; enfin C est la correction capillaire qui provient de ce que, l'ampoule étant étroite, le liquide relevé près des bords donne sur toute la largeur de l'ampoule une forme concave au ménisque. De ces trois termes, le premier seul p reste constant pendant toute la durée de l'expérience.

106. **Valeur moyenne de h.** — h varie du commencement à la fin de l'expérience, de toute la hauteur $\alpha\beta$. Poiseuille prend pour valeur

moyenne à introduire dans l'expression du débit la moyenne des distances verticales de D à α et à β. Pour s'assurer que cette évaluation était correcte, Poiseuille fit une expérience directe. Il souda (*fig.* 18) au tube horizontal large auquel aboutit le tube capillaire un tube

Fig. 18.



vertical large et long FG; il mesura ensuite le temps nécessaire pour l'écoulement de 1mm de liquide dans ce tube, à trois hauteurs peu différentes, l'une étant la moyenne des deux autres.

Voici les nombres qu'il obtint :

Hauteur du liquide.	Durée d'écoulement de 1mm.	
mm	m s	
1329,5	7.9	moyenne : 7m 11s,2
1317,5	7.13,5	
1323,5	7.11	

On voit que la loi des moyennes est applicable.

Cela posé, supposons que l'ampoule soit régulièrement soufflée et qu'elle possède un plan horizontal de symétrie, les repères α et β étant bien symétriques par rapport à ce plan.

Considérons deux tranches d'égal volume, symétriques par rapport à ce plan (¹). La tranche supérieure s'écoule plus vite, et la tranche inférieure plus lentement qu'une tranche de même volume située dans le

(¹) A cause de la capillarité, ces tranches planes symétriques ne sont pas les tranches réelles, inégalement courbes.

C'est un exercice intéressant que d'analyser graphiquement toutes ces influences; mais, dans les expériences de Poiseuille, la pression extérieure p est toujours assez grande pour que cette discussion minutieuse soit inutile. Il n'en est pas de même dans beaucoup de montages pour manipulations ou expériences physico-chimiques.

plan de symétrie. La durée d'écoulement de cette dernière est alors, d'après ce qui précède, la moyenne des durées d'écoulement des deux autres tranches, et l'on peut prendre pour h, dans l'expression de la pression en D (*fig.* 17), la distance verticale qui sépare ce point du plan de symétrie de l'ampoule.

Quant à la valeur de p, si elle n'est pas absolument constante, elle varie très peu pendant la durée de l'expérience. On en prendra la valeur moyenne.

107. Correction capillaire. — C varie pendant la durée de l'écoulement; maximum au repère α, cette quantité diminue ensuite jusqu'à un niveau très inférieur au plan de symétrie et voisin de l'orifice inférieur où elle est minimum sensiblement nulle. Elle augmente à partir de là jusqu'au repère β en repassant, en sens inverse, par les mêmes valeurs.

Il s'agit de déterminer la valeur moyenne à introduire dans la formule. L'évaluation théorique paraît difficile; Poiseuille l'a évitée par l'artifice suivant :

Il remplaça d'abord le tube capillaire DE, de la figure 29, par un tube plus large, afin que l'écoulement fût plus rapide, puis détermina la durée d'écoulement t du volume v compris entre les repères α et β; P_1 étant la pression mesurée, $P_1 - C$ est la pression vraie sous laquelle se fait l'écoulement. Puis, détachant l'ampoule, il souda, au même tube d'écoulement, un tube cylindrique vertical, soigneusement gradué en dixièmes de centimètre cube et pour lequel la correction capillaire, immédiatement connue par le diamètre, était égale à 2^{mm}. Il détermina avec ce tube la durée d'écoulement d'un volume v' connu, sous une pression mesurée P'_1 voisine de P_1, la pression vraie étant $P'_1 - 2$. En admettant la proportionnalité des durées d'écoulement aux pressions, ce qui est sûrement légitime pour des pressions P_1 et P'_1 voisines, Poiseuille tirait la valeur de C.

Voici ses nombres :

	Volume écoulé.	Pression moyenne d'écoulement en millimètres d'eau.	Durée d'écoulement
Ampoule	$v = 2^{cm^3},1057$	$P_1 - C = 647,485 - C$	$4^m 18^s,25$
Tube cylindrique...	$v' = 2^{cm^3}$	$P'_1 - C' = 648,36 - 2$	$4^m 17^s,3$

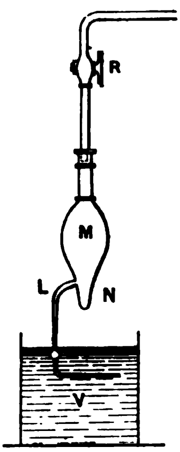
Valeur de C calculée d'après cette expérience.... $C = 3^{mm},2$ d'eau

Pour la plus petite ampoule employée par Poiseuille ($v = 0^{cm^3},125$) la correction C a atteint 10^{mm} d'eau.

On voit l'importance de cette correction qui est une fraction notable de la pression quand celle-ci est faible. De plus, elle dépend de la tension superficielle. Pour le mercure, par exemple, elle serait encore plus considérable et de signe contraire.

108. Mesure de la pression extérieure (*fig.* 19). — Pour obtenir une pression extérieure p, aussi constante que possible, Poiseuille avait relié son ampoule à un réservoir M de verre (*fig.* 19), commu-

Fig 19.



niquant par l'intermédiaire de tubes, d'une part avec une pompe de compression ou une machine pneumatique, et, d'autre part, avec un réservoir en cuivre de 50 litres environ.

Le tube L partait de M latéralement de manière qu'une cavité N fût ménagée au fond de l'ampoule en forme de poire; les poussières y tombaient et n'arrivaient pas au liquide de l'ampoule.

La poire M communiquait avec un manomètre à mercure ou, pour les faibles pressions, avec un manomètre à eau, tous deux à air libre. Les branches du manomètre à mercure étaient un peu étroites (6^{mm} à 7^{mm} de diamètre), d'où résultait une faible erreur de capillarité qu'on pouvait négliger, car les deux branches étaient à peu près égales.

La mesure de la pression nécessitait deux corrections :

1° Correction de pression gazeuse; elle provient de ce que l'atmosphère, sous pression, n'exerce pas la même pression au niveau de l'eau dans la branche ouverte du manomètre, et sur la surface de l'eau du récipient V (*fig.* 19) dans lequel est plongé le tube capillaire; cette cor-

rection, variable avec la pression moyenne. était voisine de 1^{mm} d'eau;

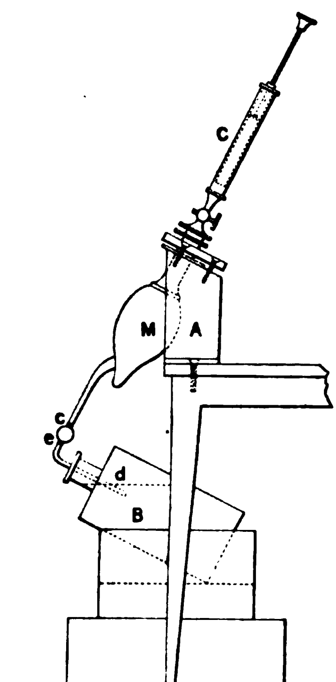
2° Correction provenant de ce que la pression dans l'ampoule ne s'exerçait pas au même niveau que dans la branche ouverte du manomètre : correction voisine de $1^{mm},5$ d'eau.

L'ensemble des deux corrections donne un total d'à peu près 3^{mm} d'eau, variable d'une expérience à l'autre.

109. **Remplissage du tube**. — Il faut employer de l'eau absolument pure et débarrassée de poussières. Poiseuille employait de l'eau distillée qu'il filtrait, sur des filtres Berzélius, de 10 à 20 fois; il s'arrêtait lorsqu'il n'y avait plus, dans le liquide, de poussières visibles à la loupe; cette eau était ensuite placée dans un flacon bouché à l'émeri.

Pour effectuer le remplissage du tube, on fixait à la poire une

Fig. 20.



pompe aspirante; en même temps, l'ampoule et le tube étaient inclinés de manière que l'orifice de celui-ci se trouvât au milieu de la masse d'eau distillée propre et filtrée contenue dans le flacon (*fig.* 20).

On produisait alors, à l'aide de la pompe, une légère aspiration; le liquide pénétrant dans le tube remplissait l'ampoule.

110. **Température**. — L'influence de la température est considérable. Aussi fallait-il opérer à température bien constante. Le bain d'eau dans lequel était immergé et débouchait le tube capillaire a permis à Poiseuille d'obtenir une température voisine de 10° et constante à $\frac{1}{20}$ de degré près.

II. — RÉSULTATS DE POISEUILLE.

111. **Loi des pressions.** — Pour un tube donné, la loi de proportionnalité des pressions aux débits est exacte si le tube a une longueur suffisante.

Exemple. — Un tube, de $0^{mm},14$ de diamètre, a été étudié successivement aux longueurs suivantes :

cm
10,05
7,58
5,11
1,575
0,955
0,6775
0,1

Le volume de l'ampoule était .... $13^{cm},341$

Pour les trois premières longueurs, la loi des pressions est exacte entre $98^{mm},404$ et $774^{mm},810$ de mercure.

A la pression de $98^{mm},404$, la durée d'écoulement à travers le tube de $5^{cm},11$ a été de $1^h 55^m 21^s$, soit 6921 secondes.

Si l'on se sert de ces données pour calculer, d'après les pressions des autres expériences, les durées d'écoulement, en admettant la loi des pressions comme exacte, et si l'on compare ces durées calculées aux durées observées, on obtient le Tableau suivant :

Durées observées.	Durées calculées.
s	s
4594	4591,78
3515	3521,00
1757	1757,80
878	878,99

L'écart maximum est de $\frac{1}{500}$; en prenant les moyennes, la concordance a lieu certainement au $\frac{1}{1000}$.

Mais les tubes plus courts ont donné des écarts plus grands, indiquant non des erreurs d'expériences, mais la fausseté de la loi.

Par exemple, à la pression $24^{mm},661$ la durée d'écoulement a été de 8646 secondes à travers le tube de $1^{cm},575$ (à peu près 100 diamètres).

En partant de là, pour calculer les autres durées, on a :

Durées	
observées.	calculées.
4355^s	4299^s
2194	2170
1455	1438
1116	1097
571	549
298	275

Poiseuille n'a pas réussi à mettre en évidence une loi coordonnant les résultats quand les longueurs deviennent assez petites pour que la loi de proportionnalité cesse d'être exacte. Il s'est borné à faire des remarques qualitatives sur les longueurs limites pour différents diamètres; voici ses nombres :

Diamètres.	Longueurs auxquelles la loi est encore exacte.	Longueurs auxquelles on est sûr que la loi n'est plus exacte.
mm	mm	mm
0,030	2,0	1,0
0,045	9,0	3,0
0,085	10,1	6,0
0,141	50,0	16,0
0,650	400,1	200,0

On voit que la longueur limite, si indécise que soit sa valeur, croît plus vite que le diamètre.

Poiseuille remarque que dans les artères étroites et courtes (2^{mm} de longueur pour $0^{mm},05$ de diamètre) le mouvement des globules du sang suivi au microscope n'est plus régulier et rectiligne, comme il l'est dans les artères plus longues.

Nous verrons plus loin quelle est la véritable relation entre le débit et la pression lorsque le débit devient grand, et nous trouverons dans

les observations mêmes de Poiseuille les nombres nécessaires au contrôle de cette loi.

112. Loi des longueurs. — Les expériences sur l'influence de la pression ont été faites avec des tubes de diamètres variés. Sur chaque tube, Poiseuille faisait plusieurs séries de mesures en le raccourcissant progressivement. Pour étudier l'influence de la longueur, il suffit de rapprocher, pour un même tube, les déterminations faites à des pressions voisines, aux diverses longueurs. On ramène tous ces nombres à la même pression en appliquant la loi des pressions.

Voici les nombres obtenus avec un tube de $0^{mm},14$ environ de diamètre.

La première colonne indique les diverses longueurs; la deuxième, les durées d'écoulement déduites des observations directes faites à des pressions voisines de 775^{mm} et toutes ramenées à la pression 775^{mm}; la troisième colonne indique la durée d'écoulement déduite, au moyen de la loi des longueurs, de la durée observée pour la longueur immédiatement supérieure.

	Durées	
Longueurs.	observées.	calculées.
cm	s	s
10	1746,5	»
7,5	1307,4	1317,4
5	877,8	881,4
2,5	448,2	439,3
1,5	298,06	276,3
0,95	206,9	180,7
0,68	165,5	146,7

On voit que, pour les tubes assez longs, la loi des longueurs se vérifie suffisamment. Pour les tubes courts, elle n'est pas plus exacte que celle des pressions.

Si l'on a calculé chacun des nombres de la troisième colonne en partant de chacun des nombres de la ligne précédente dans la deuxième colonne, et non pas toujours du même, c'est afin d'éliminer autant que possible l'influence de la variation de la section d'un bout à l'autre du tube. D'un tronçon à l'autre, au contraire, la différence est minimum.

On peut même tenir compte de cette variation de la section d'un tronçon du tube au suivant. Les tubes choisis en effet peuvent être considérés comme régulièrement coniques et l'on constate que les écarts des nombres du Tableau se manifestent dans le sens des varia-

tions progressives de la section. L'accord est bien plus grand si l'on se sert de la loi des quatrièmes puissances des diamètres pour corriger les petites variations de section. Voici un exemple (p. 505-508) :

Tube d'environ $0^{mm},045$ *de diamètre.*

Longueurs.	Durée observée.	Durée corrigée et ramenée au diamètre du tube précédent.	Durée calculée comme précédemment d'après la loi des longueurs.
cm	s	s	s
15,015	6900,8	6900,8	»
10,030	4839,5	4593,0	4609,7
5,0225	2504,7	2437,9	2423,4
2,5175	1291,3	1249	1255
0,995	519,6	511,55	510,37
0,335	175,34	»	174,93

On voit que les écarts entre les deux dernières colonnes sont devenus très faibles et qu'ainsi cette correction des diamètres est tout à fait effective.

La loi des longueurs est ainsi exacte au $\frac{1}{300}$ pour toutes les longueurs auxquelles la loi des pressions est elle-même exacte.

Nous regarderons ces deux lois comme établies dans les mêmes limites de longueurs.

113. **Loi des diamètres.** — Pour établir cette loi, Poiseuille a rapproché les unes des autres les durées d'écoulement obtenues avec différents tubes pour des longueurs et des pressions sensiblement les mêmes; puis il a ramené tous ces résultats à la même longueur et à la même pression en supposant vraies la loi des pressions et celle des longueurs.

Le Tableau de nombres suivant est établi comme le précédent (p. 518-519).

La première colonne indique les valeurs approchées des diamètres; la deuxième les volumes écoulés pendant 500 secondes, tels qu'on les observe; la troisième indique les volumes écoulés pendant 500 secondes, ces volumes étant calculés pour chaque ligne d'après le nombre de la deuxième colonne contenu dans la ligne précédente, en supposant exacte la loi des diamètres.

La pression commune était 775^{mm} de mercure et la longueur à laquelle on a tout ramené était : 25^{mm}.

Diamètres moyens.	Volume écoulé pendant 500 secondes. Observé.	Calculé en admettant la loi de la quatrième puissance du diamètre.
mm	mm³	mm³
0,014	1,465	1,465
0,029	28,826	28,808
0,044	141,500	141,63
0,0855	2067,400	2066,9
0,113	6398,300	6389,2
0,14	15532,000	15547
0,65	70000	

Les volumes sont bien proportionnels aux quatrièmes puissances des diamètres. L'écart moyen n'atteint pas le $\frac{1}{1000}$. On ne peut pas espérer mieux à cause de l'influence considérable de la température. La concordance est donc excellente, au moins sous la pression choisie : 775.

D'après tout ce qui précède, on voit que les expériences de Poiseuille sont excellentes. Si l'on constate des écarts entre les lois théoriques et l'expérience à partir d'une certaine longueur, cela tient à une imperfection de la théorie.

114. Conclusion : Loi de Poiseuille. — Calcul du coefficient de viscosité μ de l'eau distillée. — Les expériences de Poiseuille conduisent donc à la formule

$$I = K.\frac{P.D^4}{l}, \tag{1}$$

où P désigne la différence des pressions aux deux bouts du tube;
l, la longueur du tube;
D, son diamètre;
K, une constante spécifique du liquide.

La loi qu'exprime cette formule est connue, à très juste titre, sous le nom de *Loi de Poiseuille*.

Le coefficient K est relié très simplement au coefficient de frottement interne μ.

On a en effet (*voir* n° 64) :

$$I = \frac{\pi P}{8\mu l}.r^4 = \frac{\pi P}{8\mu l}.\frac{D^4}{16},$$

on a donc

$$K = \frac{\pi}{128\,\mu}.$$

Or la valeur numérique de K est connue dans chaque expérience de Poiseuille, puisque I, P, D, l sont connus. On peut donc calculer μ. K et μ ne dépendent plus ni du tube ni de la pression, mais seulement des propriétés du liquide.

115. Variation de la viscosité avec la température. — K dépend de la température et varie très rapidement avec elle.

Poiseuille a étudié cette influence entre $0°,5$ et $45°$, de $5°$ en $5°$ sur les tubes de tous les diamètres depuis $0^{mm},14$ jusqu'à $0^{mm},029$; à chaque température, il a retrouvé toutes les lois précédentes : lois des pressions, des longueurs et des diamètres. Il a ainsi calculé K aux diverses températures; dans la formule, P représente des millimètres de mercure; D et l sont exprimés en millimètres; le débit I est mesuré en milligrammes.

Voici le Tableau des résultats :

Température t.	K.
0°,5	1875
10	2485
20	3237
30	4067
40	4967
45	5444

On voit que l'augmentation de K est très rapide. En comparant entre eux les nombres de Poiseuille, on voit qu'il a atteint le millième dans la mesure de K; cela suppose qu'il mesurait les températures à moins de $\frac{1}{30}$ de degré puisque K varie d'environ $\frac{1}{30}$ de sa valeur par degré. Cela nous donne une idée de l'habileté avec laquelle Poiseuille a conduit ses mesures.

Poiseuille a relié ces résultats par une formule à deux termes (p. 532) :

$$K = 135,3(1 + 0,0336793\,t + 0,0002209936\,t^2),$$

K est ici rapporté au millimètre d'*eau* à $10°$ pris comme unité de pression.

D'où, en C.G S. :

$$\mu = \frac{0,01779\rho}{1 + 0,0336793t - 0,000220993 6t^2},$$

en appelant ρ la densité variable de l'eau; O.-E. Meyer a adopté la formule :

$$\mu = \frac{0,01775}{(1 + 0,01104t)(1 + 2.0,01104t)},$$

toujours pour représenter la même série d'expériences de Poiseuille.

La variation progressive de complexité moléculaire que révèle l'anomalie de densité, sans se traduire visiblement sur la courbe de la viscosité, n'en conserve pas moins son influence et rend impossible toute représentation par une formule simple (*voir* Chap. III).

116. Travaux postérieurs à Poiseuille. — L'eau a été étudiée, accessoirement, par de nombreux expérimentateurs depuis Poiseuille; mais bien peu de ces travaux semblent comparables à celui de Poiseuille, à l'exception de celui de Pribram et Handl et de celui de Thorpe et Rodger. Dans leur grand Mémoire dont nous parlerons plus loin, ces derniers ont étudié l'eau avec un soin particulier, dans l'intervalle 0°-8°, sans parvenir à y découvrir la moindre anomalie (p. 446).

Leurs observations comparées à celles de tous leurs prédécesseurs sont représentées sur la figure 21. L'accord n'est qu'à peu près satisfaisant.

En prenant pour μ à 0° la valeur $\mu_0 = 100$, les observations des différents auteurs sont comprises :

A 10°	entre	73,5	et	73,2
A 30°	entre	45,6	et	45,25

Slotte ([1]) dans ses recherches sur les dissolutions, en particulier sur les chromates, a proposé la formule

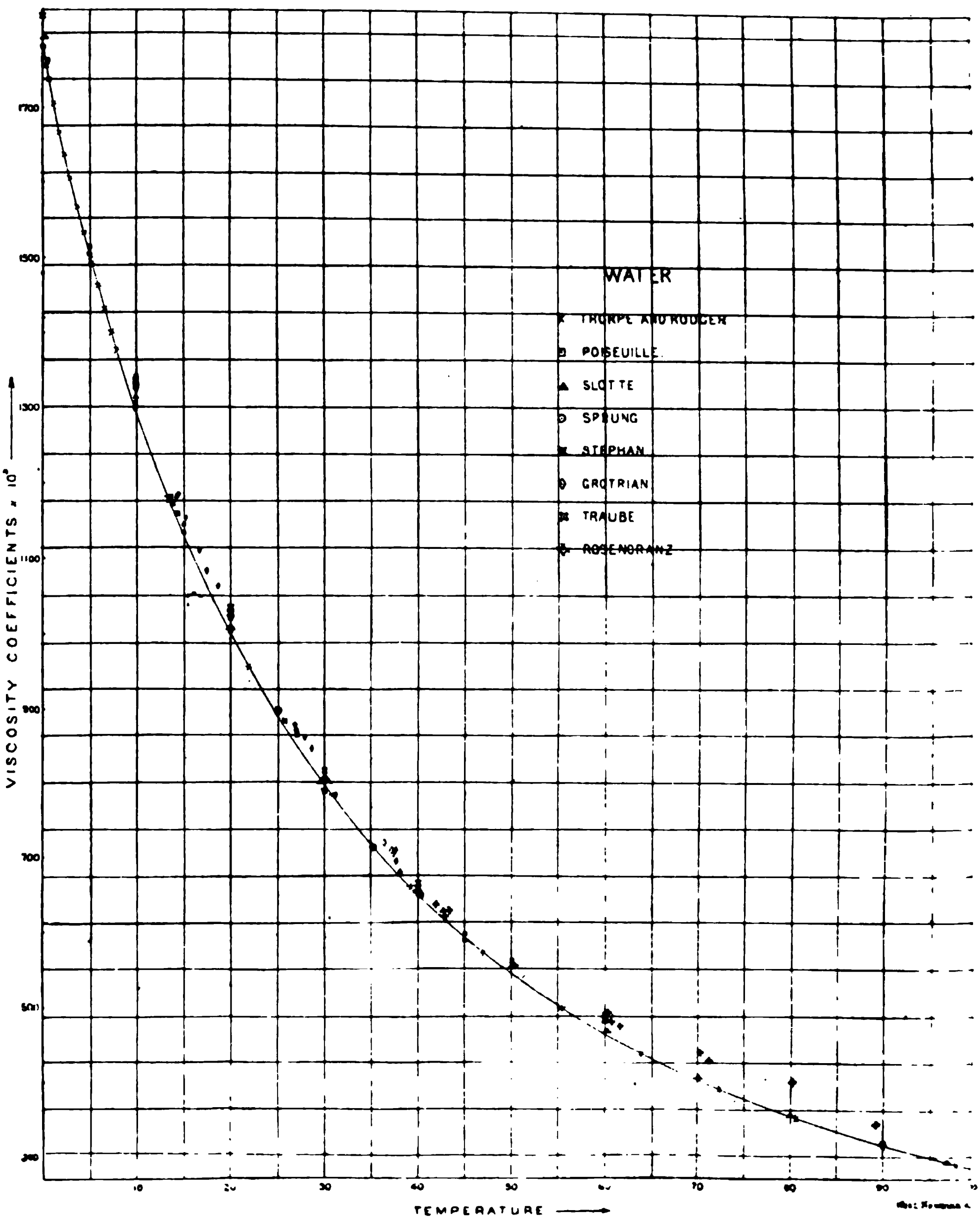
$$\mu = \frac{0,52119}{t + 26} - 0,00131,$$

qui ne concorde guère avec l'expérience qu'au centième.

([1]) *Wied. Ann.*, 1881-1883.

Fig. 21.

Thorpe & Rodger — *Phil. Trans.* 1894. A. *Plate* 8.



On peut lui donner, d'après Grætz (1888), la forme suivante :

$$\mu = 0{,}07338\,\mu_0 \frac{390 - t}{t + 28{,}62},$$

qui met en évidence, au numérateur, la température comptée au-dessous de la température critique, ou à peu près, et au dénominateur une température comptée au-dessus du point de fusion ou à peu près.

III. — PERTURBATIONS AUX EXTRÉMITÉS DU TUBE CAPILLAIRE. CORRECTION DE FORCE VIVE.

117. Exception apparente à la loi de Poiseuille. — Poiseuille a montré que si la longueur du tube tombe au-dessous d'une certaine limite, qui dépend du diamètre, sa loi ne s'applique plus. La théorie devient donc insuffisante.

La théorie générale du mouvement des fluides visqueux d'où nous sommes partis est correcte et, dans l'application que nous en avons faite au cas des tubes capillaires, nous avons supposé seulement que la vitesse du liquide qui s'écoule est parallèle à l'axe du tube. Dans toute région du tube où cette hypothèse est légitime, l'intégration conduit à la relation de Poiseuille entre le débit et la chute de pression par unité de longueur.

Soient :

P la chute de pression entre deux sections du tube où la vitesse est parallèle à l'axe;
l la longueur de tube qu'elles comprennent;
D son diamètre et I le débit,

$$I = \frac{PD^4}{l}\,\frac{\pi}{128\,\mu}. \tag{1}$$

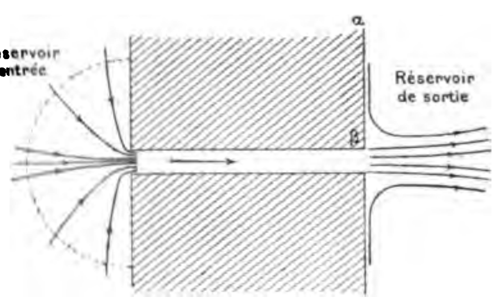
Cette loi élémentaire est certainement exacte pour toute section suffisamment éloignée des bouts. Mais pour la vérifier par l'expérience on l'applique au tube entier. Dans ce cas, deux causes d'erreur apparaissent :

1° Au voisinage des bouts du tube les lignes de courant doivent cesser d'être parallèles à l'axe, car elles convergent vers l'entrée du tube dans le réservoir d'où le liquide part et divergent à la sortie dans celui où elles aboutissent; et l'influence de ces changements de direction doit se faire sentir sur une certaine longueur dans le tube.

2° La quantité P qui figure dans la formule (1) désigne la chute de pression entre les deux sections terminales du tube; or ce qu'on mesure c'est la différence des pressions qui règnent dans les deux réservoirs entre lesquels le tube est établi. Cette différence peut s'écarter notablement de P.

118. Nature du mouvement aux extrémités du tube capillaire. — Supposons les bouts du tube coupés bien perpendiculairement à l'axe. Comme le diamètre du trou est très petit par rapport à l'épaisseur de la paroi, on peut se représenter le tube comme un étroit canal, creusé dans une masse de verre illimitée, aboutissant perpendiculairement sur deux parois indéfinies baignées par les masses liquides des réservoirs d'entrée et de sortie (*fig.* 22).

Fig. 22.



Les lignes de courant ne sont pas distribuées de la même façon à l'entrée et à la sortie.

A l'orifice d'entrée, elles forment un flux convergent venant de toutes les directions dans un angle de 180° autour du trou; on peut admettre que ces lignes ont la forme régulière indiquée par la figure 36, si les mouvements sont assez lents, c'est-à-dire qu'il ne se produit pas de mouvements tourbillonnaires. Ce faisceau de lignes de courant doit s'étrangler en entrant dans le tube pour prendre presque aussitôt la direction de l'axe.

A la sortie, le liquide qui a acquis tout le long du tube un mouvement bien rectiligne forme une sorte de jet qui ne s'évase que lentement. On peut s'en assurer en colorant légèrement l'eau du réservoir d'entrée, celle du réservoir de sortie restant incolore; le jet est alors rendu visible. On constate qu'il s'élargit lentement et ne se mélange au liquide ambiant qu'assez loin de l'ouverture. Ce flux sortant entraîne très peu par viscosité le liquide qui l'entoure; celui qui baigne

immédiatement la paroi n'est pas entraîné d'une façon sensible. Puisque le jet subsiste sur une longueur notable après la sortie, on peut conclure que les lignes de courant restent certainement parallèles à l'axe à l'intérieur du tube jusqu'à la sortie.

En résumé, le parallélisme des vitesses à l'axe est réalisé tout le long du tube sauf sur une certaine longueur à l'entrée; cette longueur est sûrement faible, sans doute de l'ordre du diamètre. C'est donc seulement dans des tubes très courts qu'il en faudra tenir compte; nous ne ferons pas le calcul de correction qui serait alors nécessaire, parce que l'incertitude sur la forme réelle de l'embouchure le rend illusoire.

Dès que la longueur du tube est un peu grande par rapport au diamètre, cette correction devient négligeable et, dans la formule de Poiseuille, la longueur *mesurée* du tube peut être introduite telle quelle sans erreur sensible.

Mais la seconde des causes d'erreur signalée plus haut (n° **112**) prend une importance autrement grande quand le débit n'est pas très petit, et nécessite une correction qui introduit un terme proportionnel au carré du débit. Occupons-nous en maintenant.

119. Correction de force vive. — Appelons P_1 et P_2 les pressions qui règnent dans les sections terminales du tube respectivement à l'entrée et à la sortie; P'_1 et P'_2 les pressions, déduites hydrostatiquement de celles qu'on mesure dans les deux réservoirs au moyen de manomètres en relation avec les régions où le liquide est immobile.

La différence inconnue $P_1 - P_2 = P$ est la quantité qu'il faudrait introduire dans la formule de Poiseuille; on introduit à la place la différence $P'_1 - P'_2$ (mesurée) qui n'est pas égale à P; d'où la cause d'erreur qui nous occupe.

Il est facile de voir que l'écart est acquis à l'entrée et qu'il n'est pas détruit à la sortie.

Dans les parties du vase éloignées de l'orifice, où règne la pression P'_1, le liquide est immobile. Dans le tube, un peu au delà de l'orifice, il a acquis la force vive qu'il conserve tout le long du tube; si donc on considère un filet liquide qui se dirige vers l'entrée en se rétrécissant, la vitesse s'accélère le long de ce filet; la pression doit, par suite, être plus grande du côté large que du côté étroit vers lequel le liquide est chassé. La différence $P'_1 - P_1$ est précisément la chute de pression nécessaire pour faire acquérir au liquide la force vive

qu'il a à l'entrée, en même temps que pour vaincre les frottements des filets liquides les uns sur les autres dans le réservoir d'entrée.

Un raisonnement du même genre devrait conduire, pour la sortie, à la conclusion $P_2 < P'_2$ si le jet s'épanouissait et si la distribution des vitesses de sortie était symétrique de la distribution de l'entrée. Mais, à la sortie, le mouvement est tout autre qu'à l'entrée ; le jet, d'abord régulier sur une certaine longueur, se résout plus loin en tourbillons qui s'éteignent au sein de la masse liquide du réservoir, par suite de la viscosité. La force vive du jet ne produit pas de chute (négative) de pression et de travail proprement dit; elle est tout entière absorbée dans les frottements des mouvements tourbillonnaires qui la transforment intégralement en chaleur.

La conservation du jet montre qu'à la sortie, la distribution des vitesses est encore la même que dans l'intérieur du tube; il en est donc de même de la distribution des pressions. Dans tout le vase, y compris le jet régulier, mais à l'exclusion de la région où le jet se résout en tourbillons, règne la distribution hydrostatique; P_2 et P'_2 sont égales.

Nous sommes en mesure maintenant d'écrire correctement l'équation complète du mouvement qui tient compte de la chute de pression dans le réservoir d'entrée.

Le régime permanent étant établi, nous allons écrire que, pendant un temps très petit dt, la somme des travaux des forces motrices est égale à la somme des travaux des forces de frottement dans le réservoir d'entrée et dans le tube augmentée de la demi-force vive du liquide qui s'écoule pendant ce temps.

120. 1° **Travaux des forces motrices**. — Dans le réservoir d'entrée, décrivons une sphère S ayant l'orifice du tube comme centre et un rayon assez grand pour que sa surface se trouve dans la région du réservoir d'entrée où la vitesse du liquide est sensiblement nulle et où la pression est celle qu'on mesure : P'_1. Les filets liquides peuvent être considérés comme partant normalement de cette sphère. Pendant le temps dt, une quantité de liquide $I\,dt$ pénètre dans cette sphère. Le travail de la pression P'_1 pendant ce temps est

$$P'_1\, I\, dt,$$

car, si, à travers un élément dS de cette sphère, le liquide entre avec une vitesse normale v, le travail de la pression est

$$P'_1\, dS \times v\, dt.$$

La somme des travaux pour toute la sphère est

$$P'_1 \, dt \int v \, dS = P'_1 \, I \, dt.$$

De même, le travail de la pression P_2 à l'orifice de sortie est, dans le même temps,

$$-P'_2 \, I \, dt.$$

Le travail moteur total est donc

$$(P'_1 - P'_2) I \, dt.$$

121. 2° **Travail du frottement.** — A l'entrée du tube, la distribution des vitesses est indépendante de leur valeur absolue lorsque le mouvement est assez lent pour que les équations soient linéaires; la vitesse en un point est donc égale au produit d'une fonction des coordonnées seules, par le débit I. Le travail converti en chaleur, égal à la fonction de dissipation, dans chaque élément de volume, fonction homogène du deuxième degré des vitesses de déformation, est donc proportionnel au carré de I.

Précisons l'influence des dimensions : pour des vases semblables, la distribution des vitesses est la même, c'est-à-dire qu'en appelant a une dimension linéaire caractéristique du vase, la section d'écoulement est proportionnelle à a^2, et chacune des vitesses est définie par une équation telle que

$$u = \frac{I}{a^2} f_1\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}, \frac{z}{a}\right), \qquad v = \frac{I}{a^2} f_2\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}, \frac{z}{a}\right), \qquad w = \frac{I}{a^2} f_3\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}, \frac{z}{a}\right),$$

et une quelconque des dérivées est telle que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{I}{a^3} \frac{\partial f_1}{\partial\left(\frac{x}{a}\right)}.$$

La fonction de dissipation par unité de volume est

$$\mu \frac{I^2}{a^6} F\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}, \frac{z}{a}\right),$$

et pour le volume entier, proportionnel à a^3,

$$\mu \frac{I^2}{a^3} \Phi,$$

Φ étant une constante numérique définie pour chaque forme de vase.

Lorsque l'évasement de l'orifice a une forme définie, on peut adopter pour a le rayon de l'orifice.

Pour un tube de résistance $\mathcal{R}$, le calcul de la loi de Poiseuille équivaut au calcul de la dissipation de travail $\mathcal{R}\,I^2$. Le travail, converti en chaleur à l'orifice d'entrée et dans le tube pendant le temps dt, est donc

$$\left(\mu\frac{\Phi}{a^3}+\mathcal{R}\right)I^2\,dt.$$

La résistance $\mathcal{R}$ étant de la forme $\mu\mathcal{R}_1 l$, où $\mathcal{R}_1$ ne dépend que de la section du tube, mais non de sa longueur, on peut poser

$$\lambda=\frac{\Phi}{a^3\mathcal{R}_1}$$

et définir le rôle de l'orifice d'entrée par la longueur de tube λ qui dissipe la même quantité de travail.

Pour un tube circulaire de rayon a

$$\mathcal{R}_1=\frac{8}{\pi a^4},\qquad \lambda=\frac{\pi a}{8}\Phi,$$

et Φ est comparable à l'unité.

Le calcul théorique de Φ sera entièrement laissé de côté ici.

122. Équation de l'écoulement. — La force vive acquise pendant le temps dt est celle que possède un volume $I\,dt$ de liquide à l'intérieur du tube. Pour des tubes de section semblable, elle est, par unité de volume, en un point xyz,

$$\frac{\rho}{2}\left(\frac{I}{a^2}\right)^2\left[\overline{f_1\left(\frac{x}{a},\frac{y}{a},\frac{z}{a}\right)}^2+\overline{f_2\left(\frac{x}{a},\frac{y}{a},\frac{z}{a}\right)}^2+\overline{f_3\left(\frac{x}{a},\frac{y}{a},\frac{z}{a}\right)}^2\right],$$

et, en moyenne,

$$\frac{\rho}{2}\frac{I^2}{a^4}\Psi,$$

en appelant Ψ un nombre pur; d'où pour le volume $I\,dt$

$$\frac{\rho}{2}\frac{\Psi}{a^4}I^3\,dt.$$

L'équation complète du travail est donc

$$(P'_1-P'_2)I=\left(\frac{\mu\Phi}{a^3}+\mathcal{R}\right)I^2+\frac{\rho}{2}\frac{\Psi}{a^4}I^3$$

ou

$$P'_1 - P'_2 = \left(\frac{\mu\Phi}{a^3} + \mathfrak{A}\right) I - \frac{\rho}{2}\frac{\Psi}{a^4} I^2.$$

123. Calcul de la force vive. — Le calcul exact de Ψ est facile quand on connaît la distribution des vitesses dans le tube.

Pour le tube circulaire, Hagenbach [1] en a indiqué le principe et l'a fait inexactement, en adoptant la distribution hypothétique de Hagen. Franz Neumann, dans ses Leçons de 1858-1859, publiées après sa mort en 1883, l'a fait correctement pour la première fois. M. Couette l'a refait indépendamment en 1890.

Soit r_1 le rayon du tube. Découpons la section en anneaux étroits concentriques; soit r le rayon moyen de l'un d'eux et dr sa largeur; la vitesse u en tout point de cet anneau est (n° 63)

$$u = A(r_1^2 - r^2).$$

La quantité de liquide qui le traverse dans le temps dt est

$$2\pi r\, dr\, u\, dt,$$

dont la force vive est

$$\pi r\, dr\, \rho u^3\, dt.$$

La force vive totale acquise pendant le temps dt par le liquide qui passe d'un vase dans l'autre est donc

$$T\, dt = \pi\rho\, dt \int_0^{r_1} u^3 r\, dr = \pi\rho\, dt \int_0^{r_1} A^3 (r_1^2 - r^2)^3 r\, dr = \frac{\pi\rho}{2} A^3 \frac{r_1^8}{4}\, dt.$$

Exprimons cette demi-force vive en fonction du débit (n° 64)

$$I = \pi \frac{A}{2} r_1^4,$$

quand il n'y a pas de glissement. On a

$$T\, dt = \frac{\rho}{\pi^2 r_1^4} I^3\, dt.$$

124. Discussion. — Dans l'équation finale

$$(1) \qquad P'_1 - P'_2 = \frac{8\mu(l+\lambda) I}{\pi r_1^4} + \frac{\rho}{(\pi r_1^2)^2} I^2,$$

[1] *Pogg. Ann.*, t. CIX.

nous avons donc deux termes de correction :

1° L'un, λ, à ajouter à la longueur du tube et qui corrige les frottements à l'entrée; ce terme devient négligeable si l est suffisamment grand devant r_1 ;

2° L'autre terme est proportionnel à I^2. Négligeable quand le débit est très faible, il prend de l'importance quand le débit devient un peu grand.

Si donc, pour une même différence de pression P'_1, on raccourcit de plus en plus le tube, le débit augmentant beaucoup, le terme en I^2 intervient et la loi des pressions cesse d'être exacte.

De la formule (1) on tire μ

$$\mu = \frac{P'\pi^2 r_1^4 - \rho I^2}{8\pi I(l+\lambda)}.$$

125. Comparaison avec les expériences de Poiseuille. — M. Couette a corrigé, par cette formule, les valeurs de μ tirées des expériences de Poiseuille pour lesquelles la loi des pressions cessait d'être exacte dès les plus faibles vitesses.

Négligeons d'abord λ.

Voici quelques-uns des nombres obtenus :

1° Diamètre des tubes .... $0^{mm},14$
Longueur .... $1^{cm},575$

Valeur de μ en C.G.S.	Pressions en millimètres de mercure à 10°.
0,01328	24,66
39	49,59
32	98.23
24	148,23
25	194,26
25	388,00
30	775,16
Moyenne... 0,01329	

2° Même tube, raccourci. Longueur... $0^{cm},677$

		Pressions.
0,01363	vitesses croissantes encore faibles moyenne : 0,01364	
63		
63		
64		
66		
82	grandes vitesses.	$387^{mm},89$
88		$773^{mm},79$

Le coefficient μ est devenu indépendant de la vitesse pour un même tube. Toutefois la correction paraît un peu faible aux très grandes vitesses, probablement à cause de la proximité du régime hydraulique.

Le μ du premier tube est différent de celui du second.

Calculons maintenant la vraie valeur de μ et la correction λ, au moyen des deux équations que fournissent les valeurs moyennes aux faibles vitesses

$$0{,}01329\, l = \mu(l + \lambda),$$
$$0{,}01364\, l' = \mu(l' + \lambda),$$

qui donnent

$$\mu = 0{,}01303$$

un peu inférieure à la viscosité adoptée par Poiseuille (0,01309) et

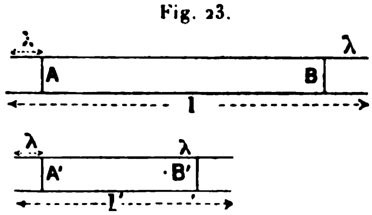
$$\lambda = 0^{\text{mm}},33,$$

soit environ cinq fois le rayon du tube.

126. Élimination expérimentale des causes d'erreur. — Prenons deux tubes d'inégale longueur mais identiques en tout le reste. Admettons que les phénomènes soient les mêmes aux extrémités de chaque tube quand le débit est le même pour les deux.

Soient A et B (*fig.* 23) deux sections du premier tube, A' et B'

Fig. 23.



deux sections du second, chacune voisine d'une extrémité, la distance λ d'une section à l'extrémité correspondante étant la même pour les quatre.

Si λ est assez grand, on est sûr qu'entre A et B comme entre A' et B' les mouvements sont parallèles à l'axe et la loi de Poiseuille applicable.

Appliquons-la donc à ces deux tronçons de tube.

Soient l et l' les longueurs totales des deux tubes, P et P' les

chutes de pression respectives de A à B et de A′ à B′, quand le débit I est le même pour les deux tubes. On a

$$(1)\qquad I = \frac{r_1^4}{8\mu}\frac{P}{l-2\lambda} = \frac{r_1^4}{8\mu}\frac{P'}{l'-2\lambda} = \frac{r_1^4}{8\mu}\frac{(P-P')}{l-l'}.$$

Mais, si l'on appelle P_1 et P_2 les pressions mesurées dans les réservoirs extrêmes entre lesquels le premier tube est établi, et de même P'_1 et P'_2 les quantités analogues pour le second tube, on a

$$P - P' = (P_1 - P_2) - (P'_1 - P'_2),$$

puisque les phénomènes, aux extrémités, sont les mêmes pour les deux tubes.

La relation (1) devient donc

$$(2)\qquad I = \frac{r_1^4}{8\mu}\frac{[P_1 - P_2 - (P'_1 - P'_2)]}{l-l'},$$

formule où il n'entre plus que des quantités effectivement données par l'expérience.

La formule (2), où est éliminée l'influence des bouts, nous montre que, tout en ne s'appliquant à aucun des deux tubes séparément, la loi de Poiseuille s'applique au quotient de la différence des pertes de charge par la différence des longueurs.

127. Expériences de M. Couette (¹). — Cette méthode d'élimination a été mise en œuvre par M. Couette au moyen de l'appareil que représente la figure 24.

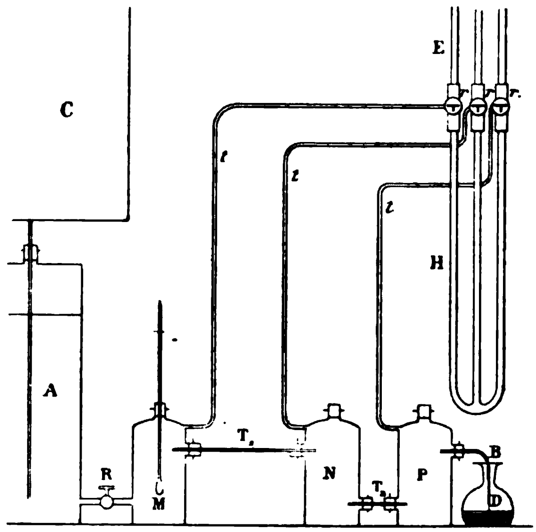
L'eau part d'un grand vase de Mariotte A, en relation avec un réservoir d'air comprimé; elle traverse successivement un réservoir M, un premier tube T, un second réservoir N, le second tube T_2 et un troisième réservoir P, puis s'écoule par l'orifice B, dans un flacon, qu'on pèse pour mesurer le débit.

Les réservoirs M, N, P, pleins d'eau, communiquent par des tubes de plomb également pleins d'eau avec les trois branches d'un manomètre de verre H dont la partie inférieure contient du mercure; les dénivellations du mercure dans les trois branches mesurent les différences de pression entre ces réservoirs.

(¹) *Thèse* (1890) et *Journal de Physique*, 1890, p. 414.

La viscosité déduite de ces expériences reste bien constante tant que la vitesse n'est pas trop grande.

Fig. 24.



128. Dissolutions salines. — Poiseuille a publié dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* de 1842 à 1846, après son Mémoire fondamental sur l'eau pure, une série de travaux sur les dissolutions.

La plupart des sels augmentent, par leur dissolution dans l'eau, la viscosité de ce liquide. La loi de variation est assez complexe.

Si, pour un sel donné, on trace une courbe en portant en abscisses la proportion centésimale de sel dissous, et en ordonnées la viscosité de la dissolution (la viscosité de l'eau à 10° étant prise pour unité), on obtient une courbe qui change sensiblement d'allures d'un sel à l'autre.

Pour le chlorure de manganèse $MnCl^2$, par exemple (*fig.* 25), la variation est d'abord lente, puis la courbe monte très rapidement.

Certains sels, comme, par exemple,

$$KBr, \quad KI, \quad AzH^4Br, \quad AzH^4I, \quad AzO^3AzH^4, \quad \ldots,$$

donnent des minima très nets, au moins à basse température.

La courbe (*fig.* 26) est relative à l'azotate d'ammoniaque, qui, à 10°, présente bien un minimum net.

Au contraire, aucun des sels de sodium étudiés ne présente cette particularité.

Il y a donc des sels dont les dissolutions aqueuses coulent plus facilement que l'eau pure.

Fig. 25.

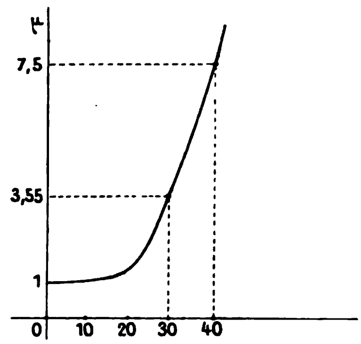
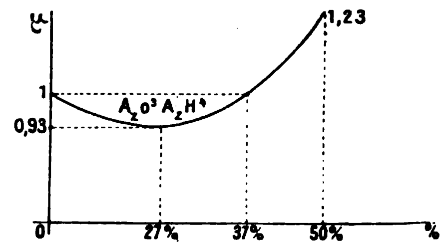


Fig. 26.



Des recherches étendues de Sprung (P. A. 1876) ont confirmé ce résultat de Poiseuille : le minimum se produit à une température d'autant plus élevée que la concentration est moindre. A égale concentration, la viscosité varie en sens opposé au poids moléculaire de l'acide et à celui de la base.

Nous nous bornerons à ces brèves indications; les très nombreux travaux sur les solutions tirent surtout leur intérêt de la comparaison entre la viscosité et la conductibilité électrique. Nous renverrons le lecteur au Volume de la collection des Aide-Mémoire intitulé : *Résistance électrique et fluidité*, par M. Gouré de Villemontée.

CHAPITRE II.

EXPÉRIENCES SUR LE FROTTEMENT INTÉRIEUR DU MERCURE.

129. Intérêt de l'étude du mercure. Expériences de Poiseuille. — Le mercure ne mouille pas le verre; des expériences faites avec ce liquide pourront donc nous renseigner sur le glissement à la paroi.

Poiseuille avait fait des expériences sur des dissolutions salines dans l'eau; elles avaient confirmé les résultats généraux fournis par l'eau. La Commission de l'Académie, chargée d'examiner ces travaux, proposa des expériences sur le mercure. Poiseuille les fit et obtint des résultats qui ne concordaient pas avec ceux qu'il avait obtenus pour l'eau; la loi des pressions semblait n'être plus exacte. Comme il employait l'appareil même qui lui avait servi pour l'eau, on pouvait admettre que la divergence tenait à la grande différence entre les chutes de pression au début et à la fin de l'expérience; ces variations, qui tiennent à la grande densité du mercure, ne peuvent devenir négligeables que sous de fortes pressions; mais alors c'est la loi simple des pressions qui cesse elle-même d'être exacte, sous l'influence des termes dus à la force vive. Ces expériences étaient à refaire.

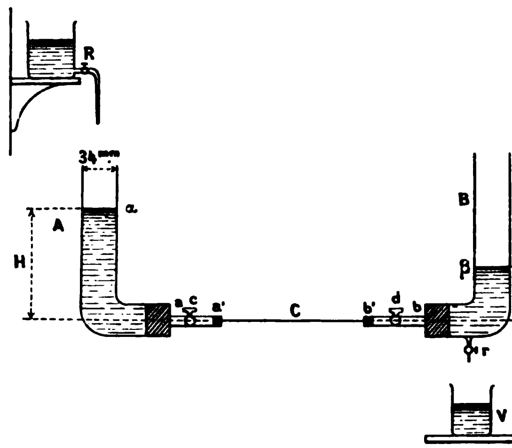
130. Expériences de Warburg ([1]). — Warburg est le premier qui ait publié des expériences un peu étendues sur la question; malheureusement elles manquent de précision et nécessitent des manipulations trop délicates.

L'appareil se compose de deux tubes larges, A et B, verticaux, recourbés horizontalement au bas; deux tubes horizontaux aa', bb' traversent les bouchons qui forment les deux tubes A et B; ils portent deux robinets de verre c et d. Enfin le tube capillaire C relie, par l'intermédiaire de bouchons de liège, les tubes aa', bb' (*fig.* 27).

([1]) *Pogg. Ann.*, t. CXL, 1870, p. 367.

Un vase D contenant du mercure est placé au-dessus du tube A et le robinet R permet de faire écouler une quantité convenable de ce mercure dans le tube A. Enfin, le tube B est muni également d'un ro-

Fig. 27.



binet r qui permet de faire écouler du mercure dans un vase taré V.

On commence par nettoyer soigneusement le mercure, on remplit l'appareil et l'on règle au cathétomètre l'horizontalité du tube capillaire. Cela fait, on amène les niveaux du mercure dans A et B, à la hauteur de deux repères tracés sur ces tubes, dont la distance verticale représente la différence de pression H — H′, sous laquelle doit se faire l'écoulement.

Les robinets c, R et r étant fermés, on vise avec deux cathétomètres les ménisques dans A et B, puis on laisse les lunettes en place. On fait ensuite écouler un peu de mercure par le robinet r sans le recueillir, on referme ce robinet, puis on ouvre les robinets c et d; du mercure passe de A en B à travers le tube capillaire; on suit dans la lunette la marche du niveau dans B, et, quand ce niveau arrive à la hauteur du réticule, on met un chronomètre en marche; c'est le commencement de l'expérience. On ouvre aussitôt partiellement les robinets R et r, que l'on règle de manière que les niveaux dans A et B se maintiennent constants. Quand on juge que l'expérience doit prendre fin, on ouvre largement le robinet r pendant un instant de manière à faire un peu baisser le niveau dans B; on ferme alors complètement ce robinet et l'on remet l'œil à la lunette. On arrête le chronomètre au moment précis où le ménisque en B devient tangent au fil horizontal de la lunette.

L'expérience ayant été ainsi conduite, le mercure contenu dans le vase V a exactement le même poids que celui qui s'est écoulé à travers le tube capillaire pendant le temps marqué par le chronomètre. Deux pesées le déterminent, et l'on connaît ainsi le débit. De plus, la pression est restée sensiblement constante pendant l'écoulement; malgré l'absence d'indications à ce sujet dans le Mémoire de Warburg, il est possible que chaque niveau, dans A et B, ait été maintenu constant à $\frac{1}{10}$ de millimètre près. La différence de pression $H - H'$ serait donc restée constante à $\frac{1}{5}$ de millimètre près, c'est-à-dire au moins à $\frac{1}{500}$ près, la valeur de $H - H'$ n'ayant pas été prise inférieure à 10^{cm}; dans certaines expériences, elle a même été de 20^{cm}.

131. Mesures absolues. — Résultats. — Les premiers essais de Warburg ont porté sur la loi des pressions, point qu'il était nécessaire d'éclaircir, après les expériences de Poiseuille.

Quatre tubes furent essayés :

Numéros.	Longueur.	Rayon.	Température des expériences.
	mm	mm	o
1.........	605,0	0,40615	15,0
2.........	626,0	0,31385	18,0
3.........	871,5	0,22346	$17,\frac{1}{4}$
4.........	461,0	0,14447	$17,\frac{2}{3}$

Les tubes 1 et 2 ont donné pour la loi des pressions des écarts considérables; ils étaient sans doute trop courts, étant donnés leurs diamètres.

Les deux autres tubes ont obéi à la loi; on conserva leurs résultats ainsi que ceux d'autres tubes de dimensions comparables.

Warburg n'a d'ailleurs donné aucune indication sur le calibrage des tubes qu'il employait, les cinq chiffres significatifs des rayons sont donc illusoires.

La loi des quatrièmes puissances des diamètres a été trouvée exacte à la température de 17°; il n'y a donc pas de glissement notable.

Le coefficient de viscosité déduit de ces expériences est

$$\frac{\mu}{\rho_1} = 0,1181 \text{ (mm, g)},$$

à $\frac{1}{250}$ près.

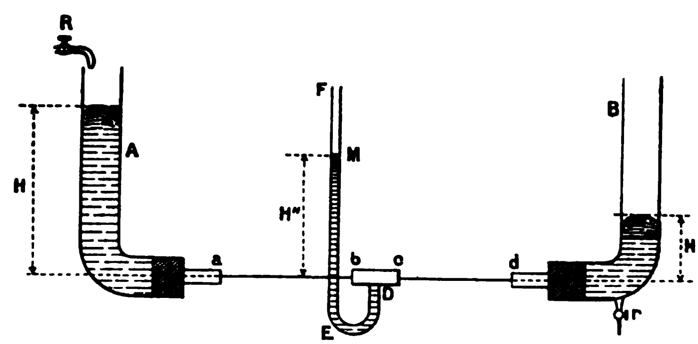
Warburg signale une grosse difficulté de ce genre d'expériences;

c'est l'altération progressive du mercure, soit seul, soit au contact du verre.

Le verre doit être récemment nettoyé (à l'aide de SO^4H^2, eau, alcool, air chaud) et le mercure récemment purifié et séché. Si le mercure a séjourné quelques jours dans les vases, les expériences sont irrégulières.

132. Mesures relatives. — Loi des diamètres. — Absence de glissement à la paroi. — Pour contrôler avec plus de précision l'adhérence à la paroi, Warburg a fait des mesures relatives, en comparant l'un à l'autre, sous le même débit, deux tubes capillaires de diamètres différents, disposés l'un à la suite de l'autre (*fig.* 28).

Fig. 28.



Sur le tube large bc, qui les relie, est adapté un manomètre à air libre DEF. Quand les deux niveaux dans A et B sont réglés de manière à rester constants, grâce aux robinets R et r, on constate que le niveau M dans DE reste constant.

Le tube DE étant un peu étroit, 5^{mm}, il faut ajouter au niveau M la correction capillaire : $1^{mm},8$; soient alors H, H', H'' les hauteurs du mercure dans A, DE, B au-dessus des tubes capillaires ; L_1, R_1 la longueur et le rayon du premier tube capillaire, ab ; L_2, R_2 les mêmes quantités pour le second, cd. Si la loi des quatrièmes puissances des diamètres est exacte, on doit avoir :

$$\frac{H - H''}{L_1} R_1^4 = \frac{H'' - H'}{L_2} R_2^4.$$

Considérant H — H'' comme donné, Warburg compare la valeur

observée de H″ — H′ à celle qu'on calcule d'après cette formule. Voici ses nombres :

L_1.	R_1.	L_2.	R_2.	H″ — H′ observé.	H″ — H′ calculé.
mm	mm	mm	mm	mm	mm
371,0	0,118	871,5	0,223	33,6	33,2
265,0	0,1307	871,5	0,223	61,3	62,36
122,7	0,118	871,5	0,223	75,2	75,12

Les écarts sont de l'ordre du centième; il est permis de les imputer aux erreurs d'expériences, car toute erreur relative sur la mesure des diamètres se trouve multipliée par 4.

La proportionnalité du débit à la quatrième puissance du diamètre peut être considérée comme bien établie; par conséquent, les glissements à la paroi, s'il y en a, sont extrêmement faibles. Ce résultat était inattendu; car le mercure ne mouille pas le verre, et il était assez naturel de supposer qu'il pût glisser le long d'une paroi qu'il ne mouille pas.

133. Expériences de Stéfan (1). — Des expériences antérieures à celles de Warburg avaient été faites à Vienne en 1862 par Stéfan, avec la collaboration de Ludwig.

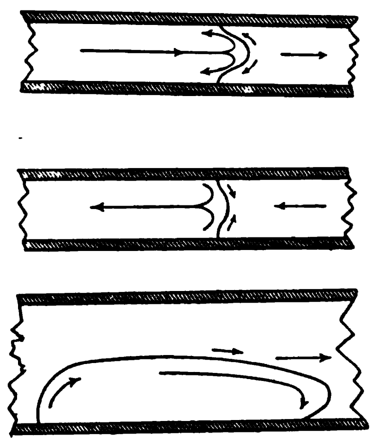
Stéfan, étudiant les oscillations d'une masse de mercure dans un tube en U étroit, essaya de calculer l'amortissement et d'en déduire le coefficient de viscosité.

Le phénomène était mal choisi. Si l'on considère, en effet, une goutte de mercure qui se déplace dans un tube, un point (*fig.* 29) de la masse de mercure située près de la paroi reste voisin d'elle pendant le mouvement, jusqu'à ce que la surface limite arrière de la goutte arrive à son voisinage; il prend alors un déplacement normal à la paroi; en d'autres termes, il n'y a pas glissement de la goutte, il y a roulement. On s'en rend compte facilement en faisant courir une goutte de mercure dans un large tube de verre. Lorsque le mercure est terni et le tube de verre bien propre, on voit les malpropretés courir sur la surface de la goutte, plus vite que celle-ci, et passer sur la surface de contact du mercure et du verre, à l'avant; lorsque la goutte a avancé de toute sa longueur, les malpropretés non adhérentes au verre sont reprises par la surface arrière et ramenées incessamment à l'aval de la goutte.

(1) *Wien Ber.*, t. XLVI, 1862.

Lorsque la goutte remplit toute la section du tube, supposé vertical, le mouvement est maximum suivant l'axe; mais, comme il n'y a pas de surface libre réunissant l'avant à l'arrière de la goutte, chacun des ménisques a sa physionomie propre. Le ménisque avant reçoit cons-

Fig. 29.



tamment du mercure propre venant de la profondeur; sa surface, constamment étendue par les bords, va s'appliquer contre le verre, et y entraîne toutes les malpropretés (en quantité finie) qui s'y trouvaient au début; elle se nettoie. Au contraire, la surface arrière qui se contracte constamment par les bords, ramasse en son centre toutes les malpropretés qui couvraient la surface et y ajoute toutes celles qui n'adhèrent pas suffisamment au tube.

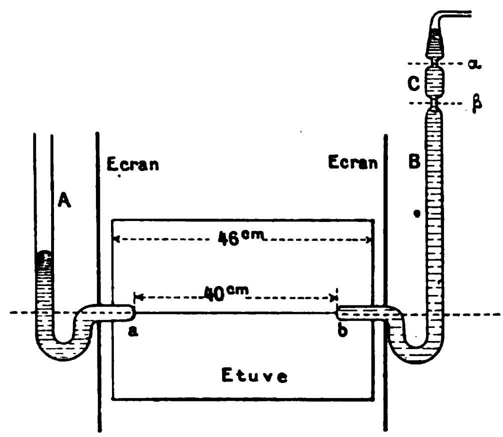
134. Variation du coefficient de frottement du mercure avec la température. Expériences de S. Koch. — S. Koch [1] a opéré dans des limites de température très étendues.

L'appareil est tout entier en verre. Le tube capillaire *ab* est soudé à deux tubes larges A et B; sa longueur est de 40^{cm}. Il est entouré par une étuve qui déborde de 3^{cm} de chaque côté (*fig.* 30); deux écrans protègent les tubes manométriques A et B contre le rayonnement. Le tube B porte à sa partie supérieure deux étranglements α et β servant de repères et comprenant entre eux une partie cylin-

[1] *Wied. Ann.*, t. XIV, 1881, p. 1.

drique large C dont le volume est celui qu'on doit faire écouler au travers du tube capillaire; les passages du mercure aux repères α et β marquent le commencement et la fin de chaque expérience.

Fig. 30.



Pour porter le tube capillaire à 100°, on faisait circuler dans l'étuve de la vapeur d'eau; la température 0° ou les températures inférieures étaient obtenues en immergeant le tube à une profondeur d'au moins 5cm dans de la glace ou dans un mélange réfrigérant.

Grâce à la disposition de l'étuve, la température est bien constante dans tout le tube capillaire, car l'écoulement est très lent.

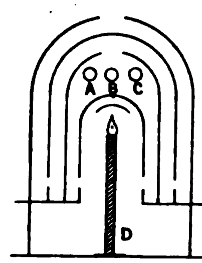
Aux températures élevées, S. Koch emploie une étuve spéciale employée déjà par von Babo ([1]). Une coupe de cette étuve est représentée figure 31. Elle est formée de feuilles de tôle recourbées, superposées, comprenant entre elles des espaces pour la circulation des gaz, et ouvertes alternativement en haut et en bas. L'appareil à chauffer est entouré par les gaz de la combustion, mais protégé par deux tôles contre la flamme directe de la rampe à gaz D, et même contre le rayonnement de la première tôle. En A, B, C on voit la coupe : 1° d'un thermomètre à air; 2° du tube capillaire; 3° d'un régulateur de température.

La température maxima à laquelle on ait opéré a été de 340°; on pouvait l'atteindre en une heure. Des températures supérieures à 300° restaient constantes à moins de 2° pendant 5 heures.

([1]) *Berl. Bericht.*, t. XIII, 1880, p. 1219.

Dans la comparaison des durées d'écoulement aux diverses températures, il y a une correction à faire. Les durées sont rapportées à la même masse de mercure, celle qui remplit le volume compris entre les repères α et β à 0°; mais ces masses n'occuperaient pas le même

Fig. 31.



A, thermomètre à air.
B, tube capillaire.
C, régulateur de pression.
D, bec de gaz.

volume aux diverses températures auxquelles on porte successivement l'étuve; or, dans la formule qui donne le débit, il faut toujours introduire le même volume d'écoulement, c'est-à-dire, au lieu de la masse Q précédente, introduire le volume $\frac{Q}{\sigma}$, σ étant la densité du mercure à la température de l'écoulement, et ramener ainsi toutes les mesures au même volume.

135. Résultats. Formule de Koch. — L'ensemble des mesures de Koch, faites sur les différents tubes entre les limites extrêmes : —18° et 340°, se résume bien à l'aide d'une formule à 4 termes :

$$\mu_t = 0,016969[1 - 0,003\,8926\,t + 0,123.10^{-5}t^2 - 1,44.10^{-8}t^3].$$

Cette formule donne pour μ les nombres suivants :

Températures.	Valeurs de μ en C. G. S.
0°	0,01697
100	0,01223
200	0,01015
300	0,00928
340	0,00905

Les écarts entre les valeurs observées et les valeurs calculées à l'aide de la formule ne dépassent généralement pas 1 pour 100.

En considérant le Tableau des nombres précédents, on voit que la variation de μ est très rapide au voisinage de 0°, et décroît quand la température s'élève. Elle est lente entre 300° et 340°, plus de 5 fois plus lente qu'au voisinage de 0°.

C'est d'ailleurs une règle générale pour les liquides : les variations de μ décroissent rapidement quand la température s'élève.

Soit T la température absolue, faisons le produit par μT; les nombres précédents nous donnent :

T.	μT.
273° + 0°	4,47
100	4,57
200	4,80
300	5,32
273 + 340	5,55

Ce produit varie peu au voisinage de 0° : μ *varie à peu près comme l'inverse de la température absolue.*

136. Expériences de Schweidler. — Schweidler (¹) a fait des expériences sur le mercure pur et sur divers amalgames à 20°, 40°, 60°; il a proposé la formule suivante :

$$\mu_t = \mu_{20}[1 - \alpha(t - 20) + \beta(t - 20)^2].$$

Voici le Tableau des valeurs de α et β :

	μ_{20}.	$10^5\alpha$.	$10^7\beta$.
Hg pur	0,001579	325	66
Hg à 2 pour 100 Cd	1652	364	131
Hg à 2,8 pour 100 Cd	1691	360	153
Hg à 1 pour 100 Pb	1627	365	196
Hg à 0,6 pour 100 Zn	1639	300	59
Hg à 0,5 pour 100 Cu	0,001620	302	25

On voit la grande importance du terme en t^2; la courbure est très prononcée pour chacun de ces liquides. On voit aussi l'influence des matières étrangères; une très faible proportion de métal étranger (Zn, Cu) abaisse le deuxième coefficient d'une quantité très notable, et redresse la courbe.

On peut alors se demander ce que signifient les nombres relatifs au mercure supposé parfaitement pur, dans les expériences de Koch

(¹) *Wien. Ber.*, t. CIII, 1893, p. 273.

comme dans celles de Schweidler. Recherchons, par exemple, à quelle température on trouverait, pour $\frac{1}{\mu_{20}} \frac{d\mu}{dt}$, le coefficient de dilatation des gaz 0,00367 :

Pour le mercure, ce serait..............	à	— 10° environ
Pour les alliages avec Cd (2,5 pour 100).		+ 20 »
» Zn ($\frac{1}{200}$Zn).......		— 35 »
» Cu ($\frac{1}{200}$Cu).......		—110 »

Les variations sont énormes et il suffit, pour les produire, de très faibles quantités de matières étrangères; comme pour la résistance électrique des métaux, la loi de la présence de matières étrangères produit, dans la variation avec la température, des perturbations considérables.

D'après les nombres de Schweidler, on voit qu'il n'y a pas moyen de comparer les coefficients de viscosité des diverses substances. Les courbes de variation avec la température ont, en effet, des allures tout à fait différentes et l'on ne sait, dans ces conditions, quelle température il faudrait choisir pour faire la comparaison.

137. **Expériences de Bénard.** — A l'occasion du cours, M. Bénard, alors préparateur au Collège de France (janvier 1899) a répété, pour le mercure, des expériences que Poiseuille avait faites sur l'eau distillée.

Calibrage des tubes. — Cette opération a été effectuée avec le plus grand soin. On a employé l'appareil ordinaire comportant deux microscopes à réticule; les glissières portaient un vernier au $\frac{1}{20}$ de millimètre. Dans les tubes conservés, les plus grands écarts entre les racines carrées des sections extrêmes ont été moindres que $\frac{1}{100}$.

Les seules valeurs absolues adoptées pour la section moyenne ont été obtenues avec des pesées au mercure; il a fallu, pour les tubes fins, remplir dix ou quinze fois chaque tube pour obtenir quelques décigrammes. Le tube n'était pas rempli complètement; la distance des deux ménisques était lue à l'appareil de calibrage, et l'on additionnait les longueurs obtenues. Le microscope d'Amici employé pour l'observation des bouts du tube, ou plutôt des extrémités des parties détachées, n'a servi qu'à donner les valeurs relatives des axes des ellipses. Les valeurs absolues des diamètres prises au microscope ont concordé d'ailleurs d'une façon très satisfaisante avec celles qui résultaient des pesées. L'ellipticité a été très faible en général.

La longueur des tubes a été mesurée à l'aide d'une règle de Gambey (étalonnée au pavillon de Breteuil) ou d'un pied à coulisse (avec vernier au $\frac{1}{50}$) pour les tubes courts.

Pour le calcul des éléments du tube, on a procédé de la manière suivante :

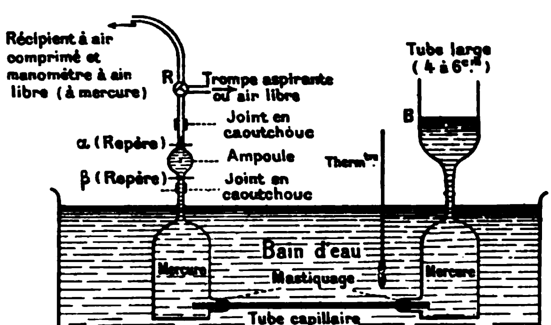
1° On a calculé, d'après les résultats fournis par les pesées, la valeur moyenne de la section et, par suite, la valeur moyenne de $\sqrt{ab}$, a et b étant les demi-axes de l'ellipse de la section ;

2° Cette valeur de la section moyenne admise, on a calculé, d'après le calibrage, la valeur des sections moyennes de chaque segment du tube occupé successivement par la goutte de mercure dans le calibrage, puis les diamètres moyens correspondants ;

3° La valeur moyenne de l'ellipticité des deux bouts déterminée directement a été admise pour celle du tube entier. On en a déduit pour chaque segment la valeur de $\frac{2a^3b^3}{a^2+b^2}$ qui joue le rôle de r^4 (*voir* le cahier d'expériences).

138. Montage des expériences. — L'appareil est dessiné ci-dessous (*fig.* 32); il est, comme on le voit, presque identique à celui de Poiseuille.

Fig. 32.



Les deux tubes à comparer dans une expérience sont tous les deux placés dans le même bain, ajustés chacun à un couple de deux flacons. Le remplissage a lieu par aspiration. L'appareil est disposé dans le bain longtemps à l'avance, et pendant l'expérience on a pu maintenir la température constante à 0°, 1 près, ce qui est très suffisant.

La même ampoule a servi pour les différentes expériences; quand l'écoulement était terminé pour un tube, on la démontait pour la

reporter sur l'appareil portant un autre tube (elle était adaptée par de simples points de caoutchouc à vide).

On n'a pas cherché à maintenir la pression constante, mais à évaluer avec le plus de précision possible la pression initiale et la pression finale. Leur différence, due surtout à la descente du niveau dans l'ampoule et à sa légère élévation dans le tube large, a été d'environ 5^{cm} à 6^{cm} de mercure (elle était un peu augmentée par les légères fuites du réservoir à air comprimé). Il faut donc opérer sous des pressions assez considérables pour que la méthode de Poiseuille, qui consiste à admettre que l'écoulement a eu lieu sous la pression moyenne, soit applicable. La vérification au $\frac{1}{1000}$ de la loi des pressions, pour des pressions moyennes de $\frac{1}{2}$ et 1 atmosphère, a justifié ce mode d'évaluation de la pression moyenne pour ces ordres de grandeur.

139. Marche et calcul d'une expérience. — Avec un même cathétomètre, on lit :

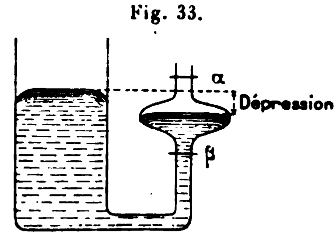
1° Le niveau du repère supérieur α.................... H_s
2° Le niveau du mercure dans le large tube B au moment où le mercure passe au repère supérieur α (commencement de l'expérience).................... N_1
3° Le niveau du repère inférieur β.................... H_i
4° Le niveau dans B à la fin de l'écoulement (quand le mercure passe en β).................... N_2

Comme on mesure le débit total $\int I\, dt$, la pression moyenne correspondante est $\frac{1}{t_1}\int_0^{t_1} P\, dt$; il faut donc déterminer P en fonction du temps.

Pour cela le manomètre à mercure est lu à intervalles réguliers si l'opération est longue.

La *capillarité* de l'ampoule à été étudiée directement. Pour cela,

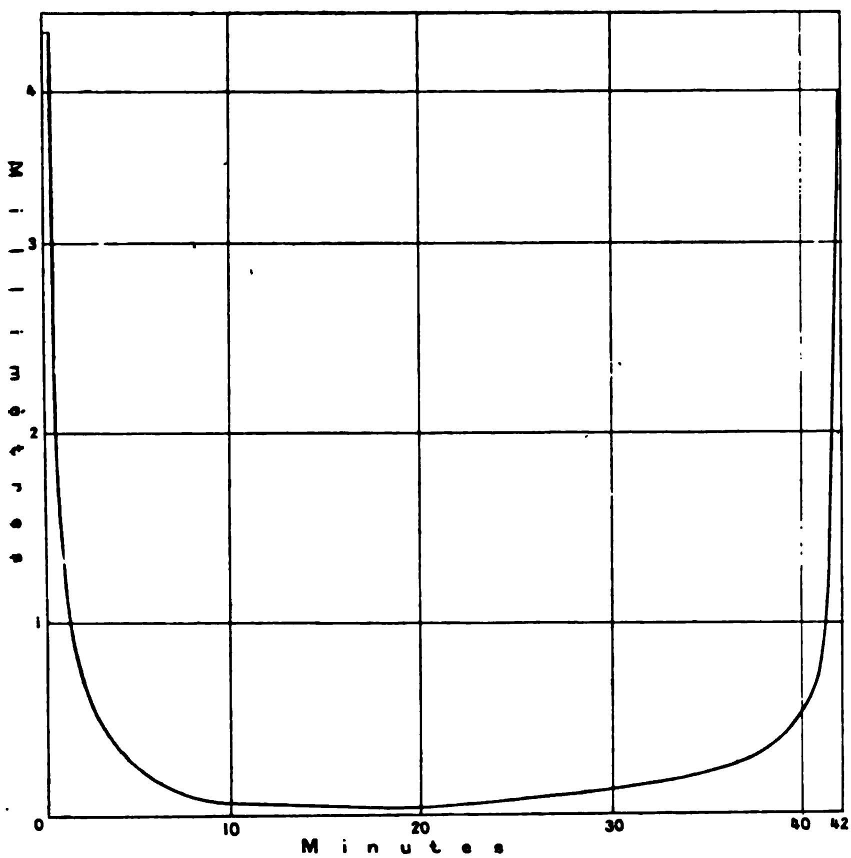
Fig. 33.



on a déterminé, dans une expérience préliminaire, la variation de la dépression capillaire (*fig.* 33) en fonction de la hauteur au-dessus du

repère β; puis, pendant une expérience d'écoulement avec un tube particulier, on a déterminé la variation du niveau dans l'ampoule en fonction du temps, l'écoulement étant fait sous pression constante et, par conséquent, sous débit sensiblement uniforme. On a déduit de ces deux expériences la variation de la dépression capillaire en fonction du temps, sous débit uniforme (*fig.* 34).

Fig. 34.



Cette courbe, construite avec soin, a donné $0^{mm},31$, comme dépression moyenne pour l'ampoule employée. On remarquera le peu d'influence des tubes étroits, à cause de leurs faibles diamètres, un peu inégaux, et la dissymétrie de la courbe, due au ménisque.

Cela posé, la pression initiale moyenne non corrigée de la dé-

pression capillaire est

$$P_1 = \text{pression initiale du manomètre} + H_s - N_1.$$

La pression finale P_2 est

$$P_2 = \text{pression finale du manomètre} + H_i - N_2.$$

La pression motrice moyenne peut donc être prise égale à

$$P = \frac{P_1 + P_2}{2} + 0^{mm},3$$

en tenant compte cette fois de la dépression capillaire.

La correction des bouts n'a pas toujours été négligeable; on a seulement fait la correction due à la perte de force vive; cette correction diminue la pression efficace d'un terme $\frac{\rho I^2}{\pi^2 r^4}$ (*voir* plus haut n° **118**).

140. Tableaux des résultats numériques (janvier-juin 1899).

I. — ÉLÉMENTS DES TUBES CHOISIS.

Numéro du tube.	Longueur.	Diamètre moyen $\sqrt{ab}$ moy. $= \sqrt{\frac{S}{\pi}}$ (S, section moyenne d'après les pesées).	Écart maximum des $\sqrt{ab}$.	$10^8 (\sqrt{ab})^4$ moy.	Écart maximum des $(\sqrt{ab})^4$.	Ellipticité $\frac{a-b}{a}$ des bouts et moyenne pour les deux bouts.	$10^8 \frac{2a^3b^3}{a^2+b^2}$ moyen.
	cm	cm					
2	44,340	0,01405	$\frac{1}{234}$	0,0003897	$\frac{1}{58}$	$\frac{1}{16}$ et $\frac{1}{12}$; Moyenne : $\frac{1}{11}$	0,0003879
4_a	44,343	0,01964	$\frac{1}{140}$	0,0014829	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{38}$ et 0 » $\frac{1}{78}$	0,0014829
4_b	21,945	0,01962	$\frac{1}{328}$	0,0014866	$\frac{1}{82}$	$\frac{1}{29}$ et $\frac{1}{38}$ » $\frac{1}{43}$	0,0014866

II. — LOI DES PRESSIONS.

Volume de l'ampoule .... $4^{cm^3},077$
Distance des repères .... $46^{mm},54$
Correction capillaire moyenne .... $0^{mm},31$

Tubes.	Température.		Débit par seconde en mm³.	Vitesse moyenne en cm-sec.	Pression initiale sans correction capillaire.	Pression finale sans correction capillaire.	Pression moyenne avec correction capillaire.	Correction de force vive en mm $\frac{\rho I^2}{\pi^2 r^4}$.	Pression motrice $P - \frac{\rho I^2}{\pi^2 r^4}$.	Durée d'écoulement.
4_a....	16°,1 / 16,1	16°,1	4,9045 mm³	16,19	728,7	676,9	703,1	2,67 mm	700,4 mm	831,4 s
4_a....	16,2 / 16,2	16,2	2,4973	8,248	382,4	332,0	357,5	0,69	356,7	1632,8

Rapport des pressions moyennes non corrigées de la force vive.....	1,9669	Rapport des pressions corrigées de la force vive. 1,9636	Rapport des durées. 1,9639

Tubes	Température.	Débit par seconde en mm³.	Vitesse moyenne	Pression. Initiale sans correction capillaire.	Finale sans correction capillaire.	moyenne avec correction capillaire.	Correction de force vive en mm $\frac{\rho l^2}{\pi^2 r^4}$.	Pression motrice $P - \frac{\rho l^2}{\pi^2 r^4}$.	Durée d'écoulement.
4_b...	{ 15°,9 ; 16,0 } 15°,95	mm³ 9,741	cm 32,16	730	679,6	705,1	mm 10,52	694,6	s 418,6
4_b...	{ 15,9 ; 15,9 } 15,9	10,178	»	763,4	712,4	738,2	11,45	726,75	400,6
				Rapport des pressions moyennes non corrigées de la force vive....		1,0470	Rapport des pressions motrices corrigées de la force vive.... 1,0463		Rapport des durées. 1,045

La première série surtout (tube 4_a) montre bien la nécessité et l'importance de la correction de force vive.

Les deux séries montrent que le rapport des pressions corrigées de la force vive est bien égal au rapport des durées : la loi des pressions s'applique. Comme précision, on atteint $\frac{1}{1000}$.

III. — Loi des longueurs.

Même ampoule.

Tubes.	Température.	Débit par seconde en mm³.	Pression. Initiale.	Finale.	Moyenne corrigée.	Correction de force vive en mm $\frac{\rho l^2}{\pi^2 r^4}$.	Pression motrice $P - \frac{\rho l^2}{\pi^2 r^4}$.	Durée d'écoulement.
4_a.....	{ 15°,7 ; 15,7 } 15°,7	mm³ 5,1485	769,2	713,5	741,6	mm 2,94	738,7	s 792,0
4_b.....	{ 15,9 ; 15,9 } 15,9	10,178	763,4	712,4	738,2	11,45	726,75	400,6

Rapport des longueurs.. $\frac{44,313}{21,945} = 2,0207$; corrigé de la petite différence de diamètres. . 2,0157.

Les quatrièmes puissances des diamètres sont identiques à $\frac{1}{1500}$ près.

Le rapport des durées ramené, par la loi des pressions, à la même pression moyenne non corrigée 741,6 est 1,986.

Le rapport des durées ramené, par la loi des pressions, à la même pression motrice corrigée de la force vive $\left(P - \frac{\rho l^2}{\pi^2 r^4}\right)$, 738,7, est 2,0097.

Il est égal au rapport des durées (ramenées à la même pression motrice corrigée de la force vive) à $\frac{1}{400}$ près.

IV. — Loi des diamètres.

Même ampoule.

Tubes.	Température.	Débit en mm³.	Pression Initiale.	Pression Finale.	Pression Moyenne corrigée.	Correction de force vive en mm $\frac{\rho l^2}{\pi^2 r^4}$.	Pression motrice $P - \frac{\rho l^2}{\pi^2 r^4}$.	Durée d'écoulement.
2.......	{ 14°,9 ; 15 } 14°,95	1,3450 mm³	777,0	700,4	739,0	0,77 mm	738,2 mm	3031,8 s
4_a......	{ 15,1 ; 15,1 } 15,1	4,9532	749,0	681,5	715,5	2,72	71[illegible],8	823,2

Les longueurs sont identiques à $\frac{1}{10000}$ près { 44,340 ; 44,343 }

Le rapport des durées ramené, par la loi des pressions, à la même pression motrice $\left(P - \frac{\rho l^2}{\pi^2 r^4}\right)$, 738,2, est 3,815.

Rapport des quatrièmes puissances des diamètres $\frac{0,0014829}{0,0003879} = 3,822$

L'écart n'atteint que $\frac{1}{550}$, ce qui peut être considéré comme excellent, vu les précautions minutieuses qu'exigent les mesures absolues des diamètres.

Ce résultat nous permet de fixer une limite supérieure à l'épaisseur de glissement ε. Si, en effet, l'égalité rigoureuse était obtenue en en tenant compte, on aurait

$$\frac{D^4 + 8\varepsilon D^3}{D'^4 + 8\varepsilon D'^3} = 3,815, \qquad \text{avec} \qquad \frac{D^4}{D'^4} = 3,822.$$

On en déduit, en millimètres,

$$8\varepsilon\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{D'}\right) = 8\varepsilon\left(\frac{1}{0,1964} - \frac{1}{0,1405}\right) = \frac{-0,007}{3,822},$$

$$\varepsilon = +0^{mm},0001 = 0^{\mu},1.$$

Comme on ne peut pas répondre que les jaugeages, même très soignés, déterminent le diamètre moyen avec une précision du dix-millième de millimètre, l'épaisseur de glissement tombe au-dessous des limites de précision qu'il est possible d'atteindre.

VISCOSITÉ DU MERCURE.

Toutes les lois d'écoulement ayant été contrôlées dans ces expériences avec une précision au moins égale à celle des Mémoires anté-

rieurs, tirons-en la valeur de la viscosité du mercure à la température des observations,

$$\mu = 0{,}01570 \quad \text{à} \quad 15^\circ{,}70;$$

ce résultat est sensiblement inférieur à celui que donne la formule de M. Koch pour la même température, 0,015938.

Il est facile de reconnaître que par l'emploi du même mercure pour les jaugeages et pour la définition de la pression, sa densité s'élimine du résultat final. Les expériences de Schweidler indiquant toutes que des traces d'impureté augmentent beaucoup la viscosité, peut-être faut-il conclure que le mercure employé par M. Bénard était plus pur que celui de M. Koch et surtout que la précision du calibrage de M. Koch était insuffisante.

CHAPITRE III.

VISCOSITÉ DES LIQUIDES PURS. INFLUENCE DE LA TEMPÉRATURE ET DE LA PRESSION.

141. **Premières recherches. Graham. Rellstab. Guérout.** — Comment la viscosité des liquides dépend-elle de leur nature chimique? c'est ce qu'ont cherché de nombreux expérimentateurs, dont les principaux travaux seront résumés dans ce Chapitre. Dès 1861, Graham ([1]) tirait de l'observation des premiers alcools, éthers et acides gras cette conclusion que la viscosité, à 20°, des corps d'un même groupe croît de l'un à l'autre comme le point d'ébullition, ou encore comme le poids moléculaire.

Quelques années plus tard, Rellstab ([2]) entreprit l'étude des mêmes corps entre 0° et 50°, et reconnut que la viscosité de tous ces corps diminue quand la température s'élève, dans une même série homologue, et que cette diminution est d'autant plus rapide que la température est plus basse et la viscosité plus grande.

Cela, toutefois, n'empêche pas l'ordre de classement de se modifier avec la température, soit que l'on considère la viscosité telle que nous l'avons définie, soit que l'on compare avec Rellstab les produits de la viscosité par le volume moléculaire ([3]). De là, une première difficulté : à quelles températures convient-il de comparer les viscosités des différents corps?

Rellstab a essayé les températures auxquelles ces différents liquides ont la même tension de vapeur, sans arriver à aucune relation précise entre la viscosité et la constitution chimique.

([1]) *Philos. Trans.* Londres, 1861, p. 373.

([2]) *Ueber Transpiration homologer Flüssigkeiten* (*In. Diss.*). Bonn, 1868.

([3]) Remarquons que ce produit ne peut pas être appelé *viscosité moléculaire*. La viscosité qu'on obtiendrait en prenant pour unité de volume le volume moléculaire au lieu d'un volume invariable et conservant des unités de temps et de force invariables serait $\mu\,(\text{volume moléculaire})^{\frac{2}{3}}$.

Il en tira seulement les remarques suivantes : A la même température les éthers isomères n'ont pas tout à fait la même viscosité. L'addition de CH^2O, de H^2 ou de O augmente la viscosité. L'addition de C la diminue.

De nombreuses mesures de Guérout ([1]), à 13° et à 15°, montrèrent, par leur désaccord avec celles de Rellstab, quelle incertitude planait encore sur les résultats bruts des expériences, et combien il était prématuré d'en tirer des conclusions générales.

142. Pribram et Handl. Appareils. — Ainsi l'étude était à peine ébauchée, les résultats numériques douteux, les conclusions générales confuses, lorsque MM. Pribram et Handl, professeurs à l'Université de Czernowitz, commencèrent leurs recherches vers 1877.

Ils n'ont pas recherché une haute précision, mais un arrangement commode pour l'étude de nombreux liquides entre 0° et 60° ou 80°. Ils ont employé successivement trois appareils.

Dans le premier (1878) le tube capillaire de 20^{cm} de longueur et $0^{cm},01$ de diamètre est soudé entre deux tubes de verre de 57^{cm} de longueur et $0^{cm},2$ de diamètre, qui le prolongent. L'ensemble forme un tube rectiligne, qui occupe l'axe d'un autre tube *horizontal* de 7^{cm} de diamètre, constamment parcouru par un courant d'eau chaude ou froide dont la température reste constante à 0°,1 ou 0°,2. Le liquide à étudier occupe une partie seulement de la longueur du tube mixte, et forme, de part et d'autre du tube capillaire, deux ménisques allongés dans les tubes de 2^{mm} de diamètre. C'est par le passage d'un de ces ménisques, en regard de divisions marquées sur le tube à 4^{cm} les unes des autres, que l'on mesure le débit. Cette détermination était évidemment peu sûre, à cause de la longue traînée de forme insuffisamment déterminée, qui constitue la partie inférieure de chacun des ménisques.

La pression motrice est maintenue constamment égale à 1^{m} d'eau, mesurée sur un manomètre en U; elle est obtenue en comprimant de l'air dans un flacon à trois tubulures par écoulement d'eau provenant d'un autre flacon semblable qu'on monte ou descend d'après les lectures au manomètre.

On a évité tous les jaugeages en tarant l'appareil avec de l'eau distillée, d'après la viscosité due à Poiseuille.

Le second appareil diffère du premier par la forme du tube résistant,

([1]) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXXI, 1875; t. LXXXIII, 1876.

qui a été recourbé en U au milieu du tube capillaire, de manière à obtenir des ménisques bien définis dans des tubes verticaux. Ce tube en U est maintenu par un bouchon dans le large tube vertical que parcourt le courant d'eau.

La pression de l'air est maintenue constante automatiquement ; pour cela, le flacon supérieur est un flacon de Mariotte ; l'eau qui en coule arrive dans le flacon inférieur par un tube recourbé vers le haut, qui s'ouvre en haut de ce flacon, au fond duquel elle retombe goutte à goutte.

A cette pression constante de l'air, il faut ajouter la petite pression variable due à la dénivellation du liquide étudié pendant son écoulement. On a maintenu ces dénivellations assez petites pour pouvoir les négliger.

A la suite d'une rupture accidentelle du second appareil, un troisième, de dimensions un peu différentes, mais de forme semblable, a servi à la plupart des déterminations finales de 1879-1880.

143. Résultats. — Dès la première année, les résultats suivants se dégagèrent nettement :

La substitution du chlore, du brome, de l'iode, et de AzO^2 à l'hydrogène augmente la viscosité ; l'ordre dans lequel ces corps sont énumérés est l'ordre des viscosités croissantes.

Les différences sont considérables de quelque façon et à quelques températures que l'on fasse la comparaison.

Les isomères peuvent avoir des viscosités très différentes : tels sont le toluène chloré

$$(C^6H^4Cl, CH^3)$$

et le chlorure de benzyle

$$(C^6H^5, CH^2Cl).$$

Dans le second Mémoire, Pribram et Handl complètent le premier résultat, en montrant que l'accroissement de viscosité, divisé par l'accroissement du poids moléculaire, est beaucoup plus grand (environ 10 fois) pour le radical AzO^2 que pour le chlore.

L'influence du poids moléculaire, dans une série homologue, manifeste aux basses températures, s'atténue aux hautes températures.

La viscosité de l'alcool propylique normal est plus grande que celle de son isomère *iso*-propylique.

L'extension et l'amélioration des mesures a permis de résoudre la question relative à l'isomérie des éthers, laissée en suspens dans le deuxième Mémoire. Des Tableaux étendus montrent que la viscosité

croît avec la complexité du radical alcoolique. L'éther qui contient le radical *normal* (alcoolique ou acide) a toujours une viscosité plus grande que celui qui contient le radical *iso*. Il en est de même pour presque toutes les fonctions.

Une double liaison de l'atome de carbone diminue la viscosité.

A 10°, la viscosité de l'aldéhyde ou de la cétone est 0,1 à 0,2 de celle de l'alcool dont elle provient; à 50°, elle est $\frac{1}{3}$.

Dans chaque série homologue, la viscosité croît proportionnellement au poids moléculaire; le taux d'accroissement dépend de la constitution de la molécule.

144. Importance de la variation en fonction de la température. Slotte. Grætz. — L'ensemble de ces résultats montre une régularité assez encourageante; mais il est évident que des résultats de quelque précision ne peuvent être obtenus que par un choix convenable des températures de comparaison. A ce propos, Pribram et Handl ont fait dès leur premier Mémoire une remarque que Grætz a utilisée plus tard, c'est qu'il convient de prendre comme une des extrémités de l'échelle des températures correspondantes le point de fusion de chaque substance.

L'allure générale de la courbe de viscosité en fonction de la température a conduit divers physiciens à essayer les formules du type hyperbolique ou exponentiel.

Slotte (¹) a proposé une formule qui, ramenée par un facteur convenable aux unités C. G. S., est

$$\mu = \frac{0{,}000178}{651{,}3}\left(\frac{21591}{t+30{,}1} - 66\right) = 0{,}000178 \times 0{,}1012\,\frac{297-t}{t+30{,}1}$$

pour la viscosité de l'eau; elle concorde, à $\frac{1}{150}$ près, avec les nombres de Sprung.

Des formules du même type ont paru convenir aux dissolutions de chromates (1881) et de divers autres sels (1883). Toutefois Slotte a été conduit, quelques années plus tard, par des observations entre limites de température plus étendues, à proposer la formule

$$\mu = \frac{c}{(t+a)^n} \tag{1}$$

avec des exposants n variant entre 1,6 et 1,9.

(¹) *Wied. Ann.*, t. XIV, 1881, p. 21.

Entre temps, Grætz ([1]), guidé par des vues théoriques sur la constitution des liquides, fut conduit à préciser la signification des constantes de la première formule de Slotte; la viscosité propre aux liquides fait place à la rigidité des solides aux basses températures, on peut supposer que la viscosité devient infinie à la température de solidification, ce qui nous ramène à la remarque de Pribram et Handl; aux températures élevées, la viscosité des liquides fait place à celle des gaz, qui paraît due à un mécanisme différent, car dans les gaz la viscosité et la conductibilité thermique croissent avec la température, tandis que, dans les liquides, ces deux propriétés marchent en sens inverse; on peut donc supposer que la viscosité propre aux liquides s'annule au point critique. Grætz a donc proposé la formule

$$\mu = A\,\frac{t_{\text{crit.}} - t}{t - t_{\text{fusion}}}, \tag{2}$$

et l'a appliquée au calcul de toutes les données numériques de Rellstab et de Pribram et Handl ([2]). Toutefois, pour obtenir une concordance satisfaisante, il faut remplacer la température de fusion par une température beaucoup plus basse. Sur les 60 corps étudiés par Pribram et Handl (entre 0° et 50° ou 60°), 54 satisfont alors bien à la formule en y mettant la température critique lorsqu'elle est connue, ou sa valeur calculée au moyen du point d'ébullition par la règle rapprochée de Paulewsky ([3]). Pour les 6 alcools, la variation réelle est beaucoup plus rapide; cet isolement des alcools se reproduit d'ailleurs pour toutes leurs propriétés, et a conduit les chimistes à introduire la notion de molécules associées en nombre croissant à mesure que la température baisse.

Il y a donc dans cette tentative de Grætz une précieuse indication; si les températures constantes pouvaient être bien définies en dehors de toute considération de viscosité, la constante A serait la seule constante de viscosité, et c'est sur elle que devraient porter les comparaisons avec la constitution chimique des corps. Malheureusement la formule n'est qu'assez grossièrement approchée et ne paraît satisfaisante que par suite de l'insuffisante étendue des variations de tempé-

---

([1]) *Wied. Ann.*, t. XXXIV, 1888.

([2]) On trouvera les valeurs observées de Rellstab, de Pribram et Handl, et les constantes de la formule de Grætz dans le *Handbuch der Physik* de Winckelmann, ainsi que beaucoup de données sur les dissolutions.

([3]) L'excès de la température critique sur la température d'ébullition est à peu près le même pour tous les corps d'une série homologue.

rature dans les mesures; et la température inférieure n'est pas la temrature de fusion. La constante A, qui est la viscosité à la température moyenne $\frac{1}{2}(t_c + t_f)$, dépend beaucoup, pour un même corps, des températures extrêmes t_c, t_f choisies. Ainsi, les expériences de Poiseuille sont encore représentées à $\frac{1}{100}$ près par la formule

$$\mu = 0{,}000178 \times 0{,}0734 \, \frac{390 - t}{t + 28{,}6} \qquad \text{(C. G. S.)}$$

très différente de celle que nous avons donnée plus haut. La température critique de l'eau, 365°, est comprise entre les deux valeurs essayées 390° et 297°. D'autre part, les valeurs extrêmes de A pour les 54 corps de Pribram et Handl sont 7 et 25; aucune comparaison entre ces constantes ne peut être instructive si, comme pour l'eau, on peut faire varier leur valeur de $\frac{1}{4}$ sans cesser de représenter les expériences.

145. De Heen. Stœl. Heydweiler. — Diverses autres formules ont été proposées; je me contenterai de les citer :

De Heen, dans sa *Théorie des liquides* (1), trouve que ses propres expériences, poussées dans certains cas jusqu'à 170°, sont bien représentées par la formule

$$(3) \qquad \mu = \mu_m(1 + ce^{-\theta t})^n,$$

où n est presque le même (2,65 à 2,85) pour les corps étudiés, et où θ est égal à 1 : 20n.

Stœl (2) a proposé la formule plus simple

$$(4) \qquad \mu = A e^{-\theta t},$$

qui représente bien la viscosité du chlorure de méthyle entre −28° et +100°, avec $\theta = 0{,}00897$, mais qui est en excès de plus en plus marqué à partir de 100° jusqu'à 123°; la température critique est 143°.

Quelques années plus tard (3) Heydweiler a montré que, pour des corps variés, la formule de Stœl est applicable entre 0,62 $T_{crit.}$ et 0,85 $T_{crit.}$, mais que, en réalité, la courbe des $\log \mu$ en fonction des T présente, pour tous ces corps, un point d'inflexion dans cette région.

(1) *Théorie des liquides*, 1888, 1re Partie, p. 103; 2e Partie, p. 88 et suivantes.
(2) *Labor. de Leyde*, 1891; — *Phys. Rev.*, t. I, p. 513.
(3) *Wied. Ann.*, t. LV, 1895, et t. LIX, 1896.

La courbure près du point critique est particulièrement nette pour l'anhydride carbonique, étudié par Warburg et von Babo (*voir* n° 158 et suiv.).

Stœl avait aussi essayé une autre formule, moins bonne,

$$\mu = B\sqrt[3]{\frac{1}{p}}, \tag{5}$$

où p est la tension de vapeur saturante du corps. On peut, avec Heydweiler, la transformer sans l'améliorer, par l'emploi d'une formule approchée de Van der Waals, pour p, et écrire

$$\mu = \frac{1}{10}\mu_c 10^{\frac{T_c}{T}}, \tag{6}$$

où l'indice c correspond à l'état critique et T désigne une température absolue.

Une transformation plus heureuse de Heydweiler consiste à appliquer la formule de Stœl aux viscosités moléculaires $\mu v_m^{\frac{2}{3}}$, v_m désignant le volume moléculaire à la température T, sous pression de saturation; on a ainsi

$$\mu = A v_m^{-\frac{2}{3}} e^{-\theta T}, \tag{7}$$

qui convient bien aux températures supérieures à 0,7 $T_{crit.}$

	θ.
Chlorure de méthyle...	0,00691
Éther ordinaire...	0,00714
Acétate d'éthyle...	0,00668
Benzine...	0,00714

Aucune de ces formules ne représente assez exactement la loi physique pour être utilement employée à une comparaison physico-chimique. Nous reviendrons sur cette question à la fin du volume, en nous plaçant au point de vue théorique. Thorpe et Rodger ont tourné la difficulté dans le très important Mémoire dont il nous reste à parler et ont réussi à rattacher la viscosité d'un grand nombre de corps à leur constitution chimique.

146. Mémoire de Thorpe et Rodger [1]. — Dans ce travail considérable, Thorpe et Rodger ont étudié des corps purs.

---

[1] THORPE et RODGER, *Philos. Trans. Roy. Soc., London*, Vol. CLXXXV, Part. II, A, 1894, p. 397-710.

Ils se sont attachés tout d'abord à réaliser les deux conditions suivantes :

1° Purifier minutieusement les corps employés;

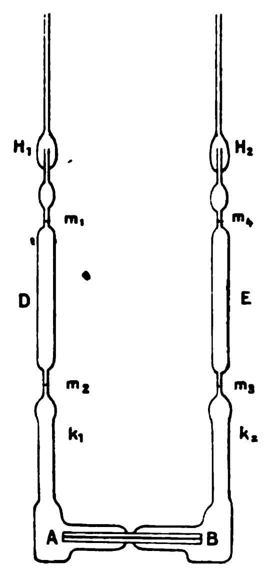
2° Étendre considérablement les limites de température. Ils ont opéré, pour certains corps, de 0° à 120°; limites encore insuffisantes cependant, car il aurait fallu approcher davantage du point critique.

La viscosité des liquides étudiés a été mesurée par l'écoulement à travers un tube capillaire, en s'assurant de l'exactitude de la loi des pressions dans chaque expérience.

147. Description de l'appareil. — L'appareil, tout entier en verre, est symétrique (*fig.* 35).

Le tube capillaire AB coupé net aux deux bouts est soudé près de

Fig. 35.



son milieu à deux larges tubes horizontaux surmontés chacun d'un large tube vertical : D et E.

Ces tubes sont rétrécis à deux niveaux différents, où ils portent des repères horizontaux m_1, m_2, m_3, m_4; le volume compris entre m_1 et m_2 et celui qui est compris entre m_3 et m_4 sont presque égaux; on les a soigneusement déterminés au préalable; ce sont ces volumes qu'on fait écouler à travers le tube capillaire; on note le temps que

le niveau du liquide, dans le tube gauche par exemple, met à passer d'un repère à l'autre.

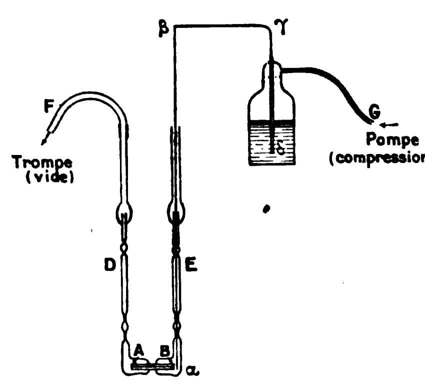
Le tube capillaire AB a $0^{mm},08$ de rayon; son calibrage a été fait d'une façon complète.

La quantité totale de liquide que contient l'appareil est égale à celle qui peut remplir l'espace compris entre l'extrémité H_1 du tube D et un repère k_2 tracé sur l'autre tube (E).

148. **Remplissage**. — Les liquides employés ont été préparés avec des soins minutieux pour assurer leur pureté chimique et éviter en même temps toute trace de poussière. Chaque liquide, distillé dans un appareil en verre entièrement soudé, était conservé dans un flacon bouché à l'émeri, dont le bouchon était recouvert d'un capuchon de verre. On a ainsi réussi à éliminer absolument toute trace de poussière.

Pour transvaser le liquide dans l'appareil, le bouchon rodé est remplacé par un bouchon à capuchon (*fig.* 36) dont le tube plongeur

Fig. 36.



effilé αβγδ descend jusqu'au fond α du tube E. On fait le vide en F et l'on comprime en G; le liquide pénètre dans l'appareil.

L'appareil étant rempli, on peut procéder aux expériences d'écoulement et les renouveler indéfiniment avec le même liquide, en le faisant passer alternativement de la branche D dans la branche E et réciproquement; de la sorte, aucune cause de contamination n'est à craindre.

Vingt-quatre expériences ont été faites sur chaque liquide à diverses températures.

Un très grand nombre de corps ont été étudiés : eau, brome, peroxyde d'azote 10 carbures d'hydrogène de la série grasse,

6 iodures, 9 bromures, 10 chlorures de substitution, 4 composés sulfurés, l'aldéhyde éthylique, 4 cétones, 5 acides gras, 3 éthers-oxydes, 6 hydrocarbures benzéniques, 11 alcools.

149. Loi de variation de la viscosité avec la température. — Pour chacun des corps étudiés, Thorpe et Rodger ont construit une courbe de variation de la viscosité avec la température, et ont comparé les courbes données par les corps d'une même famille.

La discussion graphique a conduit à un ensemble de résultats qualitatifs, dont j'extrais les principaux.

Dans les séries homologues, la viscosité croît avec le poids moléculaire.

La substitution d'un halogène à l'hydrogène accroît d'autant plus la viscosité que l'halogène est plus lourd. Ces substitutions successives donnent des accroissements différents.

L'influence de la constitution est très marquée : composés iso- et normal, dichloréthanes, dibromures, benzine.

Les alcools, les acides gras, l'eau sont exceptionnels; ils contiennent probablement des associations moléculaires; leur viscosité varie très vite avec la température.

Même pour les corps réguliers, la formule de Slotte ou celle de Grœtz sont insuffisantes pour les représenter.

Une formule de la forme suivante :

$$\mu = A \frac{1}{(t+a)^n}$$

a paru rendre compte suffisamment des résultats; il faut d'ailleurs considérer cette formule comme purement empirique. Cependant les coefficients n et a ne sont pas très bien déterminés par les observations de 0° à 120°.

Tableau des valeurs moyennes de n pour chaque groupe (p. 690).

10 Carbures gras	1,9
6 Iodures	1,7
9 Bromures	1,8
10 Chlorures	1,7
5 Acides	1,9
2 Cétones	1,9
2 Anhydrides	1,7
4 Composés sulfurés	1,7
6 Hydrocarbures aromatiques	1,7
Peroxyde d'azote	1,7
Eau	1,5
Ether éthylique	1,5
Brome	1,4
Moyenne	1,76

Les valeurs de $\frac{1}{a}$ sont bien plus variables; pour les cinquante corps à allure régulière $\frac{1}{a}$ varie de 0,0035 à 0,013 (p. 577); par conséquent a varie de 286° à 77°. Pour les corps exceptionnels c'est bien autre chose; pour le triméthylcarbinol par exemple a est inférieur à 5°.

150. Discussion. — Un changement de valeur des constantes de la formule la transforme en

$$\mu = A(t+a)^{-n}\left[1 + \frac{\delta A}{A} - n\frac{\delta a}{t+a} - \delta n \log(t+a)\right]$$

et donne les mêmes valeurs de t en μ au centième près, si l'on a, dans toute l'étendue des expériences,

$$\frac{\delta A}{A} - \frac{n\,\delta a}{t+a} + \delta n \log(t+a) < 0{,}01;$$

en appelant t_0 la température moyenne des expériences, $t_0 \pm \tau$ les températures extrêmes, et en prenant

$$\frac{\delta A}{A} = \frac{n\,\delta a}{t_0+a} = -\delta n \log(t_0+a),$$

on annule le terme constant et le terme en $t - t_0$ du développement; l'inégalité devient

$$\frac{3}{2}\frac{n}{t_0+a}\left(\frac{\tau}{t_0+a}\right)^2 |\delta a| < 0{,}01,$$

ce qui laisse une marge de variation assez étendue.

Prenons, par exemple, d'après ce qui précède,

$$n = \tfrac{7}{4}, \qquad t_0 + a = 330°, \qquad \tau = \pm 50,$$

il vient

$$\frac{\delta A}{A} = \frac{a-273}{188} = 5{,}80\left(\frac{7}{4} - n\right).$$

avec une latitude étonnante

$$|a - 273| \leqq 55°, \qquad \left|\frac{7}{4} - n\right| \leqq \frac{1}{20}, \qquad \frac{\delta A}{A} \leqq 0{,}30.$$

De là résulte que les coefficients de la formule ne sont pas propres à montrer une influence simple de la constitution chimique, mais qu'on peut se donner *a priori* une condition, par exemple adopter le même exposant $n = \frac{7}{4}$ pour un grand nombre de corps, avec des températures a très variables, ou bien la température comptée depuis la

température de fusion sous la même pression quitte à varier l'exposant. Mais dans leur discussion, pourtant très approfondie, Thorpe et Rodger ne se sont pas placés à ce point de vue, qui aurait exigé la détermination d'un grand nombre de points de solidification inférieurs à — 100°.

151. Influence de la constitution chimique. — Pour tâcher de faire apparaître l'influence de la constitution chimique sur la viscosité, Thorpe et Rodger ont d'abord cherché à introduire, dans l'interprétation des résultats, la température d'ébullition. Cela n'a rien donné. Ils n'ont obtenu aucune coordination non plus en essayant d'introduire la température critique T_c, et comparant les viscosités à une même température réduite $0,6\,T_c$, voisine de la température d'ébullition.

Ils se sont alors attachés à définir les températures correspondantes par les expériences elles-mêmes. Le choix qu'ils ont fait est d'ailleurs purement arbitraire : ils ont pris pour point de comparaison entre les liquides d'une même famille celui où la tangente à la courbe de μ en fonction de t a une inclinaison donnée, prise la même pour tous ces liquides. En d'autres termes, ils se sont donné, pour chaque famille, une valeur de $\frac{d\mu}{dt}$ choisie entre les limites des observations, et ont comparé les viscosités des corps de cette famille prises aux températures qui correspondent, sur chaque courbe, à cette pente.

Pour un certain groupe de corps, ils ont choisi pour cette valeur de $\frac{d\mu}{dt}$: — 0,0000323 (pente qui correspond au point d'ébullition de l'iodoforme CH^3I); pour les autres, — 0,0000987 ; leur choix a été commandé par cette condition que, pour chacun des corps étudiés, le point choisi fût dans la limite des observations. Pour trente-trois corps, ces deux points s'y sont trouvés à la fois.

Pour chaque corps, la formule numérique qui résume l'ensemble des expériences permet de calculer facilement la température de comparaison et la viscosité correspondante. On obtient, en effet, en dérivant

$$\frac{d\mu}{dt} = -\frac{nA}{(t+a)^{n+1}}$$

et, en prenant les logarithmes,

$$\log(t+a) = \frac{\log(nA) - \log\left(-\frac{d\mu}{dt}\right)}{n+1}$$

qui donne t; ayant t, on obtient μ par

$$\mu_t = \frac{A}{(t+a)^n}.$$

C'est ainsi qu'ont calculé Thorpe et Rodger. Mais on peut remarquer plus simplement que la formule donne

$$\frac{1}{t+a} = \left(\frac{-\frac{\partial\mu}{\partial t}}{nA}\right)^{\frac{1}{n+1}}.$$

D'où

$$\mu = A^{\frac{1}{n+1}}\left(\frac{1}{n}\right)^{1-\frac{1}{n+1}} \times \left(-\frac{\partial\mu}{\partial t}\right)^{1-\frac{1}{n+1}}.$$

Ce sont donc les valeurs de

$$\frac{1}{n}(nA)^{\frac{1}{n+1}}$$

que Thorpe et Rodger ont comparées en réalité, et entre lesquelles ils ont réussi à trouver des relations additives de constitution; c'est ce que les auteurs remarquent seulement vers la fin de leur Mémoire (p. 688), et ce qu'ils vérifient, sommairement, en constatant que la valeur moyenne du rapport des viscosités d'un même corps aux deux pentes — 0,000 0323 et — 0,000 0987 choisies, est très sensiblement égale à

$$\left(\frac{0{,}000\,0323}{0{,}000\,0987}\right)^{1-\frac{1}{n+1}},$$

avec $n = 1{,}76$.

La constante a reste en dehors, et n'a joué de rôle que pour définir les températures correspondantes.

162. **Définitions.** — Dans leur discussion très complète des résultats numériques, MM. Thorpe et Rodger ont introduit diverses quantités qu'il importe de définir :

1° *La viscosité moléculaire.* — Soit d la distance moyenne de deux molécules, l'aire moyenne d'une face du cube qui représente le volume moléculaire est d^2; la viscosité rapportée à cette surface μd^2 est la viscosité moléculaire.

2° *Travail moléculaire de la viscosité.* — Lorsque le déplacement d'une couche par rapport à l'autre est d, dans une structure

régulière, toutes les molécules auraient avancé d'un rang par rapport à celles situées immédiatement au-dessous; le produit de la viscosité moléculaire μd^2 par ce déplacement d est μd^3 que les auteurs appellent *travail moléculaire de la viscosité*, admettant que cette quantité « a évidemment les dimensions d'un travail », ce qui est faux; c'est le produit d'un travail par un temps; car, pour avoir un travail, il faut multiplier par une vitesse de glissement, qui est l'inverse d'un temps.

Le cube de la distance d s'obtient à un facteur constant près, — nombre de molécules contenues dans le poids moléculaire exprimé en grammes ($H = 2$), — en faisant le quotient du poids moléculaire M par la densité ρ.

153. Résultats. — L'une ou l'autre de ces quantités conduirait à des relations plus simples ou plus étendues que la seule viscosité, sans qu'il y ait avantage marqué à employer l'une ou l'autre. En raison de la signification théorique plus sûre, je citerai les résultats relatifs à la « viscosité moléculaire » sous la pente — 0,0000323 (p. 645),

$$\left[\mu\left(\frac{M}{\rho}\right)^{\frac{2}{3}} \text{ en C.G.S.}\right].$$

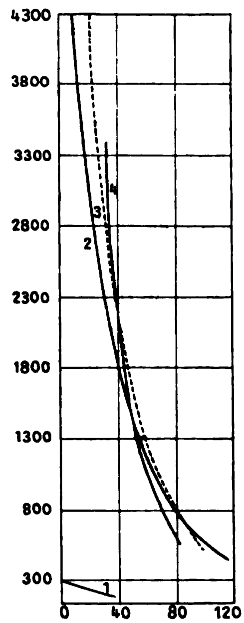
Viscosités moléculaires des éléments.

Hydrogène..................................	H	$44,5 \times 10^{-4}$
Carbone....................................	C	31
Hydroxyl-oxygène : (C — O — H).............	$\diagdown O \diagup$	166
Éther-oxygène : (C — O — C)................	$O<$	58
Carbonyl-oxygène : (C = O).................	$\overset{\|}{O}$	198
Soufre : (C — S — C).......................	$\hat{S}$	246
Chlore (monochlorures).....................	Cl	256
Chlore (bichlorures).......................	Cl′	244
Brome (monobromures).......................	Br	372
Brome (bibromures).........................	Br′	361
Iode.......................................	I	499
Groupement iso.............................	$<$	—21
Double liaison.............................	(=)	48
Chaîne fermée..............................	⊙	244

La viscosité moléculaire s'obtient en additionnant les nombres tirés de ce Tableau pour chaque atome et chaque liaison du corps étudié. On obtient ainsi, à moins de 2,3 pour 100 près (en moyenne

à 1,1 pour 100), les viscosités moléculaires de 48 composés. Trois autres, l'iodure de méthyle, l'acide formique, l'anhydride propionique, donnent des écarts supérieurs (4 à 6 pour 100). Restent neuf substances, dont l'eau, et divers chlorures de carbone, qui donnent

Fig. 37.



Abscisses : températures.
Ordonnées : viscosités (C. G. S.).
1. Éther éthylique.
2. Alcool butylique normal.
3. Alcool isobutylique.
4. Triméthylcarbinol.
(2, 3, 4 : Isomères.)

des écarts considérables en relation évidente avec l'allure toute différente de leur courbe déjà révélée par la discussion graphique.

Un autre élément, dont il a été impossible de découvrir la relation précise avec la composition, c'est la température d'égale pente, non moins importante que la viscosité elle-même.

Je me contenterai de citer quelques résultats (p. 646, 696).

Pente : —0,000 0323.

		Viscosité moléculaire	
	Température.	observée.	calculée.
Iodure de méthyle	42°,9	638	664
Iodure d'éthyle	61,5	778	784
Iodure de propyle	83,6	903	904
Iodure d'isopropyle	79,9	878	883
Iodure d'isobutyle	97,6	1010	1003
Iodure d'allyle	82	864	866

	Température,	Viscosité moléculaire observée.	Viscosité moléculaire calculée.
Bromure d'éthyle	26°,9	663	657
Bromure de propyle	54,7	774	777
Bromure d'isopropyle	51,6	750	756
Bromure d'isobutyle	76,4	877	876
Bromure d'allyle	50,8	734	739
Chlorure de propyle	26,4	658	661
Chlorure d'isopropyle	21,4	644	640
Chlorure d'isobutyle	50,0	760	760
Chlorure d'allyle	20,3	617	623

En résumé, la viscosité moléculaire, prise aux températures de même vitesse de variation de la viscosité avec la température, est sans nul doute une fonction de la composition centésimale et du mode de groupement des atomes dans la molécule.

La formule

$$\mu = A(t + a)^{-n}$$

est celle qui représente le mieux la viscosité des liquides dans un grand intervalle avec trois constantes seulement.

Pour la plupart des corps, la représentation est presque aussi exacte en adoptant uniformément l'exposant $n = \frac{7}{4} = 1,75$, ce qui réduit à 2 le nombre des constantes spécifiques.

Pour les alcools, on doit adopter un exposant voisin de $\frac{7}{2}$, mais plus variable.

Il est encore impossible d'attribuer à ces formules une signification théorique.

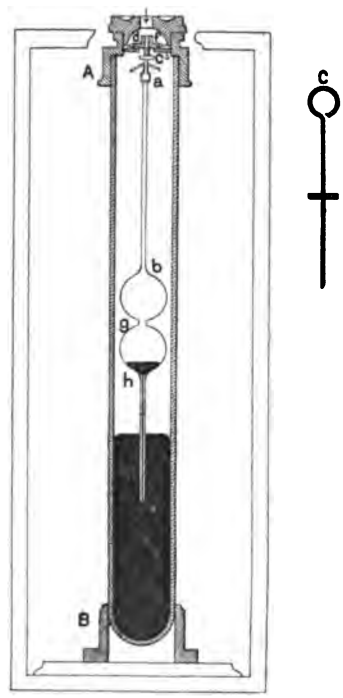
154. Influence de la pression sur la viscosité. — Röntgen (1), Warburg et Sachs (2), Cohen (3), Haüser (4) ont étudié l'influence de très fortes pressions entre des limites variées de température.

Les premières recherches sur ce sujet ont été faites de 1880 à 1884 par Röntgen à Giessen, par des moyens très simples. Le tube de verre capillaire *ab* soudé aux boules *bgh* (*fig.* 38) est contenu dans un piézomètre de verre AB (genre Magnus) plongé dans une cuve à parois de glace, pleine d'eau. Le tout est dans une cave.

(1) *W. A.*, 1884, t. XXII, p. 510.
(2) *W. A.*, 1884, t. XXII, p. 518.
(3) *W. A.*, 1892, t. XLV, p. 666.
(4) *Inaug. Diss.*, 1900.

Le piézomètre contient du mercure propre, au fond, et de l'eau distillée au-dessus. Le tube à boules est mastiqué à sa partie supérieure dans une monture de laiton à bayonnette, qu'on peut manœuvrer à l'aide de la tige auxiliaire C. Pour préparer l'expérience, on détache le tube, on le fait plonger dans le mercure, jusqu'à ce que

Fig. 38.



la boule inférieure et la moitié de la boule supérieure soient remplies de mercure; on le relève alors et on le remet en place. On ferme le piézomètre et l'on donne la pression.

On suit la descente du mercure, on note le temps nécessaire à l'écoulement de g en h. Le tube h étant large, la pression dans le mercure suit la loi hydrostatique; toute la résistance est due à l'écoulement de l'eau par le tube capillaire ab.

La théorie de l'expérience est très simple si les variations relatives de résistance avec la pression sont beaucoup plus grandes que les variations relatives de volume des vases, et de densité des liquides. Si la quantité de mercure est la même dans toutes les expériences, et si le tube prend *exactement* la même position (ce qui exige que

l'attache à bayonnette soit bien travaillée), la pression motrice p est une fonction déterminée $\psi(v)$ du volume v occupé par l'eau dans les boules, c'est-à-dire de la position du mercure. On a donc

$$p = \psi(v) \quad \text{et} \quad p = \mathfrak{R}\frac{\partial v}{\partial t},$$

$\mathfrak{R}$ étant la résistance du tube capillaire. D'où

$$\frac{\partial v}{\psi(v)} = \frac{dt}{\mathfrak{R}},$$

$$\frac{t}{\mathfrak{R}} = \chi(v),$$

en prenant pour origine des volumes l'étranglement g, et pour origine du temps l'époque de passage du mercure en ce point. La durée d'écoulement t_1 du volume v_1 de la sphère est proportionnelle à la résistance du tube, et par conséquent, pour un même tube, à la viscosité μ du liquide.

La durée d'écoulement a diminué de 0,004 environ pour 25 atmosphères, limite des pressions qu'a pu supporter longtemps sans rupture le piézomètre de verre; tandis que les autres influences ne paraissent pas dépasser 0,001.

La viscosité de l'eau diminue donc quand la pression augmente.

155. Warburg et Sachs. — M. Warburg a examiné, avec l'aide de M. Sachs, l'éther et la benzine sous la température d'environ 20°, au moyen de l'appareil qu'il avait employé dans des recherches qui seront décrites plus loin (n° 158) sur l'anhydride carbonique, en le simplifiant par l'emploi d'un manomètre métallique. La pression, exercée par une pompe à glycérine, est transmise de la glycérine au liquide par l'intermédiaire du mercure. Les joints de caoutchouc entre le verre et l'acier, qu'on ne pouvait plus employer avec l'éther et la benzine, ont été remplacés par des joints en liège imprégné à chaud de gélatine bichromatée et exposés au soleil, pour rendre le liège imperméable et insoluble.

Tous les contrôles d'usage ont été faits au sujet de la légitimité de l'emploi de la loi de Poiseuille; mais, malgré les précautions, et bien que, pour la benzine, le changement de viscosité atteigne 14 pour 100 sous 150 atmosphères, M. Warburg n'attribue pas une grande précision aux résultats, c'est-à-dire aux coefficients β de la formule

$$\mu = \mu_0[1 + \beta(\rho - \rho_0)],$$

où ρ_0 désigne la densité sous la pression d'une atmosphère, et ρ la

densité du liquide comprimé, déduite du coefficient de compressibilité de Sajotschewsky pour l'éther et la benzine, au moyen des pressions observées.

	β.	T:Tcrit.
Anhydride carbonique........	2,5	0,98
Éther......................	4,2	0,63
Benzine....................	10,2	0,53
Eau.......................	— 3,8	0,47

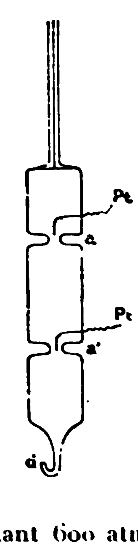
La deuxième colonne indique le rapport de la température absolue de l'observation à la température critique du corps.

Les trois premiers liquides sont normaux; β augmente à mesure qu'on s'éloigne de la température critique. L'eau à 20° est anomale, comme pour toutes ses propriétés.

Elle présente, d'ailleurs, de bien autres particularités : comprimée, puis ramenée à la pression atmosphérique, l'eau saturée d'hydrogène sulfuré a subi un changement permanent, sa viscosité a diminué. L'eau privée d'air, l'eau saturée d'acide carbonique ou d'ammoniaque peut être comprimée sans qu'aucun changement permanent de viscosité en résulte.

156. Cohen. — Cohen (Wurzbourg) a étudié, entre 0° et 25°, l'in-

Fig. 39.



fluence de pressions atteignant 600 atmosphères sur la viscosité de l'eau, des dissolutions de sel marin et de la térébenthine. La méthode

est celle de Röntgen; mais l'expérience se fait dans le bloc d'acier d'une pompe Cailletet, le passage du mercure aux étranglements a, a' est signalé électriquement grâce aux fils de platine, qui sortent du bouchon de fermeture auquel tout l'appareil de verre est suspendu par une monture en nickel. L'appareil est rempli du liquide à étudier, une goutte de mercure restant en d; on l'introduit dans le bloc d'acier plein de mercure, qui rentre par d, et commence à chasser le liquide, pendant qu'on visse le bouchon, et qu'on donne la pression. Tout le bloc est entouré d'un bain d'eau dont on lit la température avant et après l'expérience.

Les effets secondaires de la pression qui exigent une correction sont les suivants. J'indique les limites de l'erreur relative ε qui peut en résulter, d'après Cohen :

1° Diminution du volume entre a et a'; $\varepsilon \leqq -0,0015$;

2° Augmentation du rayon du tube capillaire (4e puissance); $\varepsilon \leqq +0,0020$;

3° Augmentation de densité des deux liquides, d'où augmentation de la pression motrice; $\varepsilon \leqq +0,0005$;

4° Élévation de la température interne par la compression; $\varepsilon < -0,0012$;

5° Déplacement des fils de platine : l'accord des mesures faites avec des appareils différents montre qu'il ne se produit pas.

Le manomètre de Bourdon gradué de 20 en 20 atmosphères suffit largement.

Il faut souder le platine loin de son extrémité; autrement il peut arriver qu'une petite goutte d'eau reste adhérente autour de la soudure après que le mercure a dépassé le niveau du platine, et que le contact reste irrégulier et incertain.

Les résultats généraux, que précisent les figures ci-jointes, sont les suivants :

Jusqu'à 900 atmosphères, à 25°, il n'y a pas de minimum de la viscosité; mais celle-ci décroît moins vite que la pression; la perte de viscosité est beaucoup moins marquée à 23° qu'à 1°; peut-être trouverait-on un accroissement de viscosité au delà de 40° (*fig.* 40).

La diminution de viscosité obtenue par Cohen est beaucoup moindre que celle des précédents observateurs.

Pour les dissolutions concentrées de NaCl (*fig.* 41, 42, 43) et de AzH^4Cl, μ augmente presque proportionnellement à la pression; la température influe peu, l'influence de l'eau redevient prédominante dans les solutions étendues.

Pour la térébenthine l'accroissement de viscosité par la pression est rapide et linéaire, 16,3 pour 100 par 100^{atm} à 15° et 16,7 pour 100 à 7°.

Fig. 40 (Eau).

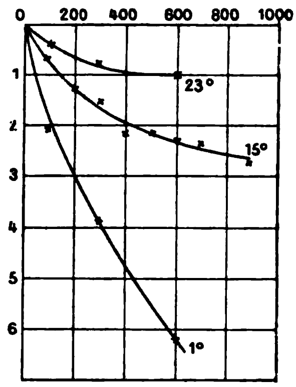


Fig. 42 (NaCl).

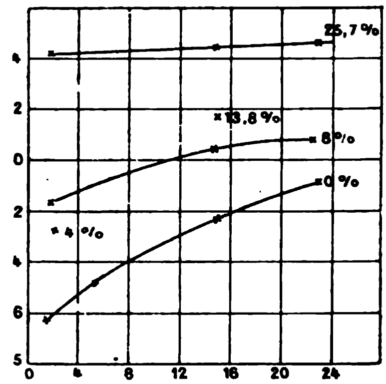


Fig. 41 (NaCl).

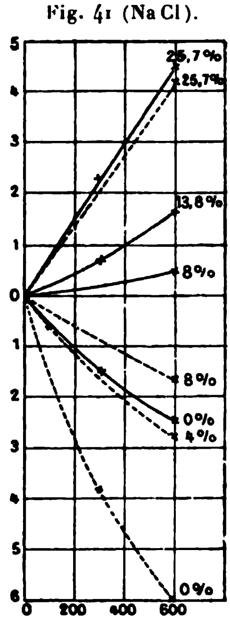
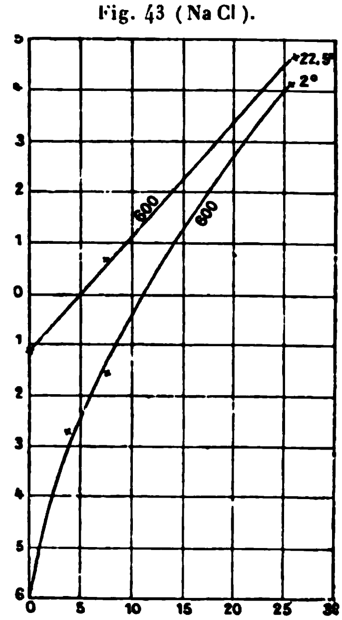


Fig. 43 (NaCl).

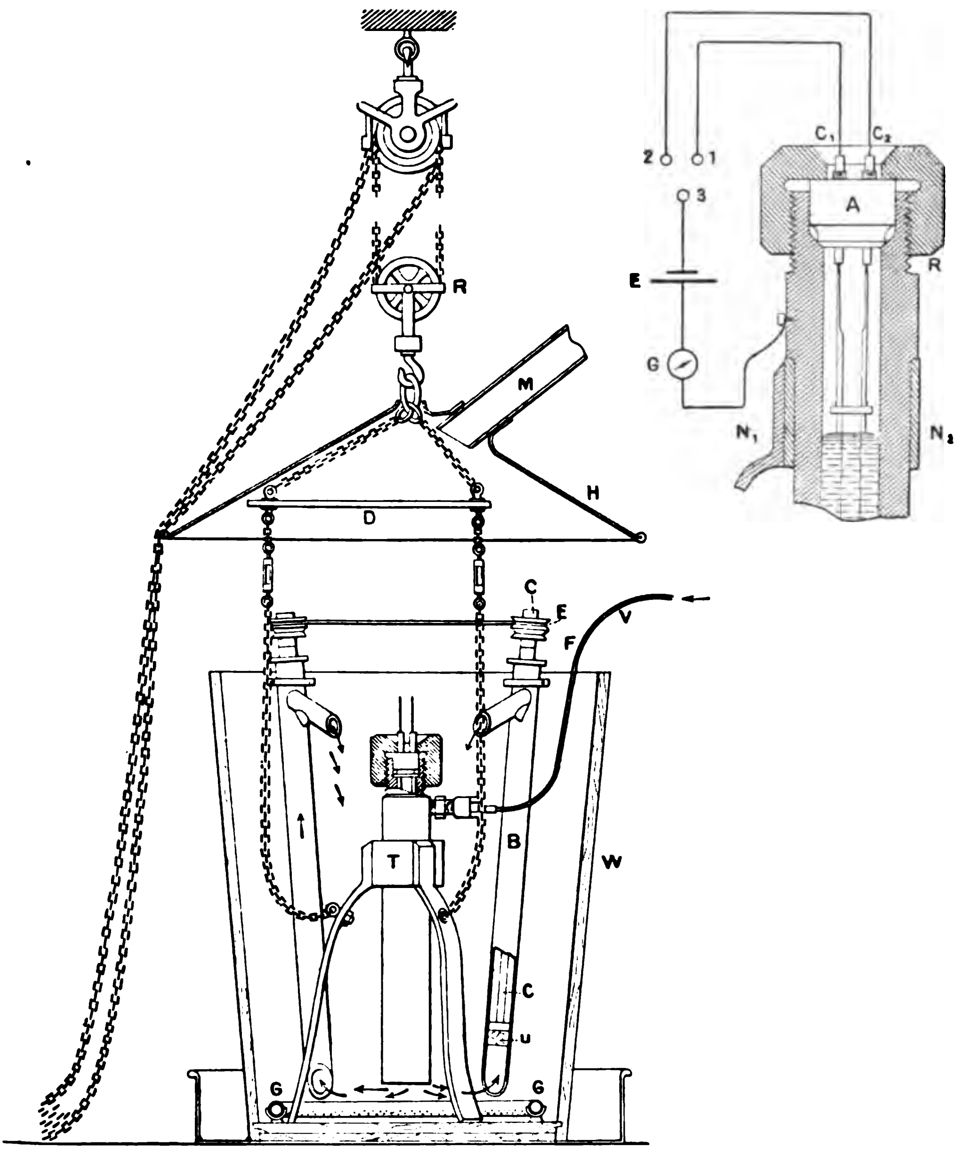


Variations relatives de la viscosité pour 100 *en ordonnées.*

Fig. 40, 41. — Pressions en abscisses.
Fig. 40. — Courbes isothermes.
Fig. 41. — Courbes d'égale concentration : ---- à 2°; — à 14°,5.
Fig. 42. — Températures en abscisses; pression 600^{atm}; courbes d'égale concentration.
Fig. 43. — Concentrations en abscisses; pression 600^{atm}; courbes isothermes.

157. Hauser. — Plus récemment, l'eau a été soumise à une étude

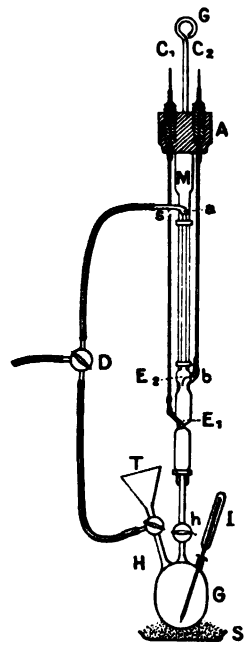
Fig. 44.



minutieuse entre 0° et 100°, et jusqu'à 600 atmosphères par M. Hauser au laboratoire du Pr. Koch de Stuttgard. La méthode est celle de

Cohen. La figure auxiliaire 44 montre les communications électriques avec les contacts C_1, C_2 des deux fils de platine E_1, E_2 (*fig.* 45) qui indiquent le début et la fin de l'écoulement. La production, le main-

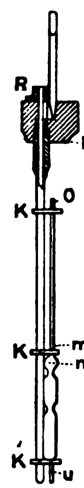
Fig. 45.



tien et la mesure des températures voisines de 100° ont exigé des soins spéciaux. La figure 44 montre l'arrangement adopté. Le bain d'eau contenu dans une demi-barrique, que recouvre le cône H, est chauffé par la vapeur que fournit à travers des vannes de réglage une chaudière placée dans une salle voisine. La vapeur qui arrive par le tube circulaire GG est injectée dans le bain par un très grand nombre de petits trous. Une circulation continue est entretenue par les hélices *u* à travers les tubes *ab*. Des thermomètres sont plongés dans le bain à diverses hauteurs. On a reconnu par des essais préliminaires qu'il faut environ 25 minutes pour que la température intérieure devienne la même que celle du bain. La manière de remplir l'appareil d'eau filtrée et privée d'air est suffisamment indiquée par la figure 45; le tube libre du robinet D aboutit à une trompe. L'eau, après avoir traversé le filtre T, ne traverse ni bouchon, ni tube de caoutchouc jusqu'à l'appareil.

Quant à la température du liquide contenu à l'intérieur du bloc, après divers essais infructueux, on l'a mesurée au moyen d'un thermomètre à mercure introduit dans une longue moufle d'acier R, vissée à fond dans le bouchon, à laquelle l'appareil en verre est fixé par les colliers K (*fig.* 46). Enfin, pour que la position du tube d'écoule-

Fig. 46.



ment soit toujours la même par rapport au mercure, ce qui est indispensable pour que la pression motrice soit rigoureusement la même dans les expériences successives, il a fallu supprimer tout anneau de métal écrasable entre le bloc et le bouchon; le bouchon a été fait, comme le bloc Cailletet, en excellent acier, reposant sur le bloc par une petite surface tronconique rodée, et l'on a obtenu l'obturation parfaite au moyen d'un serrage très énergique.

Toutes les précautions paraissent avoir été prises, et les mesures effectuées avec précision.

Au-dessous de 32° la viscosité de l'eau diminue quand la pression augmente.

A 32° la viscosité est indépendante de la pression jusqu'à 400 atmosphères.

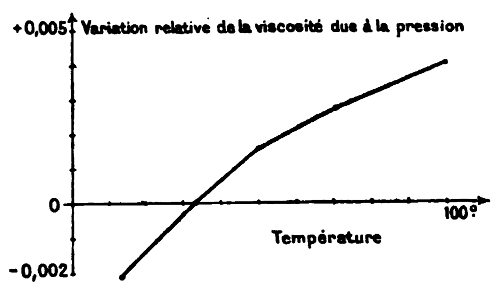
Au-dessus de 32° la viscosité croît avec la pression (*fig.* 47).

La variation relative croît plus vite que la pression.

La compressibilité du mercure et l'extension du bloc d'acier sous 400 atmosphères ont diminué la pression motrice de 0,3 pour 100. Cette diminution résulte d'un abaissement du niveau du mercure dans

le bloc, qu'on a réussi à mesurer directement par une expérience préliminaire; deux pointes d'acier reliées aux fils de cuivre qui tra-

Fig. 47.



versent le bouchon plongent dans le mercure à de très petites profondeurs, inégales; par compression on supprime le contact du mercure successivement avec l'une et l'autre des deux pointes : un abaissement du niveau de $0^{mm},40$ est produit par une pression de 170 atmosphères.

158. Anhydride carbonique près du point critique. — Warburg, après avoir collaboré avec Kundt à l'étude de la viscosité des gaz sous des pressions très faibles, a publié en 1882, avec von Babo, un très important travail *Sur la viscosité de l'anhydride carbonique au voisinage de la température critique* (1).

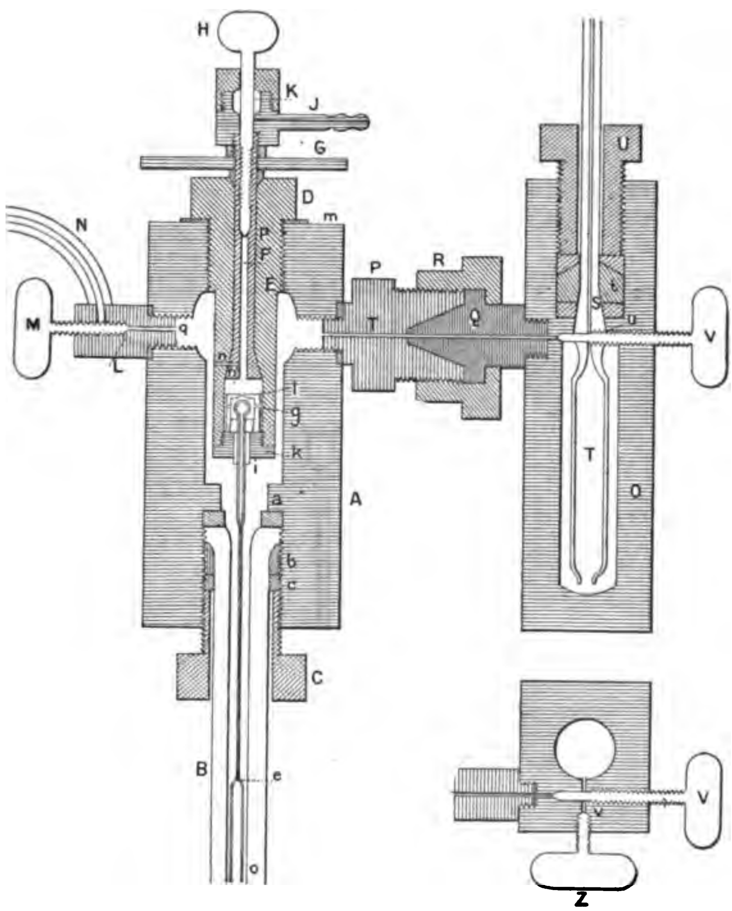
Warburg a adopté la méthode des tubes capillaires, qui paraît seule applicable dans ce cas. Pour définir l'état de l'acide carbonique il faut mesurer la température et la pression du gaz; pour définir la pression motrice, produite par la descente du mercure, il faut connaître aussi la densité de l'acide carbonique employé, dans les conditions mêmes de la mesure; enfin, le fluide du tube capillaire et du réservoir qui se remplit est soumis à une pression un peu différente de celle du fluide extérieur; il faut donc tirer de la courbe des densités en fonction de la pression la correction correspondante, tout à fait incertaine au point critique même, comme on sait. Il faut, en outre, suivre l'écoulement du liquide, pour la mesure de viscosité; le tube capillaire et son réservoir jaugé sont donc enfermés dans une éprouvette en verre épais qui permet de voir ce qui se passe. Tout l'appareil doit tenir la pression de 120^{atm}, jusqu'à une température de 40° environ.

(1) *Wied. Ann.*, t. XVII, 1882, p. 390-427.

La réalisation de toutes ces conditions a exigé la construction d'un appareil assez compliqué, en partie en acier, en partie en verre, qui mérite une description détaillée (*fig.* 48).

Le gaz carbonique préparé avec les plus grands soins est comprimé

Fig. 48.



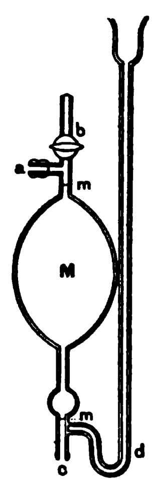
jusqu'à liquéfaction dans un solide récipient qui en contient 300^{g}. On le fait passer par distillation dans l'appareil refroidi à zéro, où il arrive par le tube de cuivre N et le robinet à pointeau ML; les autres robinets à pointeau H*p* et Z*v* étant fermés.

Le manomètre à azote TS indique quand il faut arrêter le remplissage en fermant le pointeau ML, et aussi quand il faut ouvrir les pointeaux H*p* ou *v*Z pour empêcher la pression de trop monter pen-

dant le réchauffement de l'appareil. Ce manomètre est formé par un tube de verre S de 640^{mm} de long, de 3^{mm} d'épaisseur et 0^{mm},5 de diamètre intérieur, terminé en T par un réservoir d'environ 3$^{cm^3}$ qui plonge dans le mercure du bloc d'acier O. Le tube étroit, calibré et divisé, est entouré d'un manchon avec bain d'eau; l'azote est bien sec et débarrassé d'acide carbonique. La pression se déduit du volume de l'azote supposé remplir exactement le réservoir T sous la pression atmosphérique; mais le transport du tube est assez délicat, de sorte que, sur trois séries, deux concordent bien et la troisième donne des pressions plus faibles de $\frac{1}{40}$ environ; on corrige de la différence de niveau de mercure dans le tube et dans le réservoir, et de la dépression capillaire. Le pointeau V permet d'isoler complètement le manomètre.

159. Densité du gaz. — L'appareil de mesure de la densité du gaz (*fig.* 49) se fixe par un tube de caoutchouc à vide sur la tubulure J.

Fig. 49.



Un caoutchouc fixé à *c* est rattaché au vase mobile Q d'une pompe à mercure. Le pointeau H*p* étant toujours fermé, on ouvre le robinet *b* à l'air libre, on remplit M de mercure jusqu'au trait supérieur *m*, en soulevant Q. On lit la pression au manomètre à azote. On ferme *b*, on entr'ouvre le pointeau H*p* et l'on remplit M sous une pression peu différente de l'atmosphère, en abaissant Q. Lorsque M est à peu près plein, on ferme le pointeau H*p* et on lit la pression nouvelle au

manomètre à azote. Par la manœuvre du vase Q on amène le mercure exactement au trait inférieur m', et on lit dans le tube d la petite différence de pression avec l'atmosphère. Cette pression, le volume jaugé, et la température font connaître la masse d'acide carbonique δm sortie de tout l'appareil, pour une chute de pression δp déterminée au manomètre à azote. Le volume total occupé par l'acide carbonique dans l'appareil a été d'ailleurs jaugé en détail, par un ensemble d'opérations assez pénible; il est compris entre $28^{cm^3},09$ et $28^{cm^3},16$ suivant la hauteur du mercure dans le manomètre.

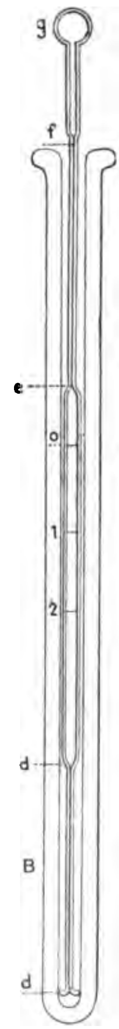
Une seconde jauge de moindre volume a été employée aux basses pressions.

On a ainsi les éléments d'un Tableau contenant, d'une part, les pressions successives, de l'autre, les masses d'acide carbonique sorties à chaque étape. A la fin de l'expérience, la masse qui reste dans l'appareil, sous une pression voisine de 30^{atm}, est calculée d'après le volume et la température au moyen de la formule de Clausius qui, dans ces limites, représente très bien les observations d'Andrews. L'addition de cette masse et de toutes les masses sorties jusqu'à une pression p donne la masse contenue dans l'appareil sous cette pression, et, en divisant par le volume correspondant, la densité de l'acide carbonique.

160. Tube à écoulement. — L'appareil de mesure de viscosité est contenu dans l'éprouvette longue et épaisse B, occupée à sa partie inférieure par du mercure (*fig.* 50). Le tube capillaire s'étend de e en f; il est surmonté à sa partie supérieure par un tube plus large qui sert à le suspendre, et terminé par une boule percée de trous latéraux g; celle-ci est protégée par un capuchon métallique l également percé de trous latéraux; ces précautions ont pour but d'éviter l'introduction de poussières dans le tube capillaire. A sa partie inférieure e, ce tube est soudé au long réservoir cylindrique ed, terminé par un tube plus étroit dd' qui reste toujours plein de mercure et autour duquel le niveau du mercure monte pendant qu'il descend dans le réservoir ed'. Trois anneaux extérieurs de platine 0, 1, 2 servent de repères; les volumes 0-1, 0-2 ont été jaugés avec précision; toutes les distances ont été mesurées à la machine à diviser; le diamètre du tube capillaire a été déterminé par des pesées au mercure. Des mesures au cathétomètre des hauteurs simultanées du mercure dans le réservoir ed', et dans l'espace annulaire dd', font connaître le rapport des sections. Une première enveloppe protège contre les acci-

dents dus aux ruptures, et un bain de 25 litres, chauffé par une cir-

Fig. 50.



culation d'eau chaude, permet d'entretenir une température constante à moins d'un dixième de degré près. Des glaces laissent voir les mouvements du mercure dans l'éprouvette.

161. Marche d'une expérience. — La mise en train d'une expérience exige qu'on puisse faire monter le mercure dans le réservoir *d'e*;

c'est à quoi l'on parvient au moyen du robinet à boisseau avec lumières latérales *n*, *n'* et lumière centrale F (*fig.* 48). En général, les lumières *n*, *n'* sont en regard et toute la masse d'acide carbonique en communication; il en est ainsi pendant presque toute l'expérience de densité précédemment décrite; mais, vers la fin de cette expérience, on tourne la manette G, les lumières *n*, *n'* cessent d'être en regard, et la fin du remplissage de M se fait uniquement aux dépens de l'acide carbonique rentré dans le vase *ed'*, dans lequel le mercure remonte, au delà du repère o; c'est alors qu'on ferme le pointeau H*p*.

L'appareil est alors prêt pour une expérience de viscosité. On attend quelques minutes, pour l'équilibre de température, et l'on détourne la manette G; le rétablissement de la communication entre les deux masses d'acide carbonique par *n*, *n'* permet au mercure de descendre; on note au chronomètre à pointage le passage du niveau aux traits 0, 1, 2; ce qui fournit les données nécessaires pour le calcul de la viscosité sous une certaine pression moyenne, à la température du bain.

Une nouvelle mesure de densité abaisse la pression moyenne et est suivie d'une nouvelle mesure de viscosité. Deux observateurs font ainsi aisément une quinzaine de déterminations entre 120^{atm} et 30^{atm}.

L'étanchéité des nombreux joints est assurée, pour les jonctions acier-acier, par l'interposition d'un mince disque de cuivre; pour les joints des tubes de verre, par l'emploi de tubes de caoutchouc (*b*), (*t*) serrés entre des disques de laiton; pour les pointeaux, par un graissage à la cire jaune; le robinet H*p* qui doit s'ouvrir sans fuites a été garni d'une bonne boîte à étoupes K. Seul le robinet à boisseau a donné lieu à des grippements assez fréquents, exigeant un démontage de l'appareil.

Trois tubes capillaires de diamètres différents : $0^{cm},010324$, $0^{cm},007202$ et $0^{cm},005694$, et de 6^{cm} à 7^{cm} de longueur, ont servi à s'assurer qu'il n'y a pas de glissement notable le long des parois; et comme rien ni au point de vue théorique, ni au point de vue expérimental ne rend ce glissement probable, sous forte pression, on a admis qu'il est nul.

A égale densité et à égale température, la pression obtenue par Warburg est inférieure à celle d'Andrews d'environ 1^{atm} aux densités moyennes et de 3^{atm} ou 4^{atm} (sur 90^{atm}) aux densités voisines de 0,7. C'est un accord suffisant, vu l'influence considérable des moindres résidus d'air non liquéfiable et la différence des manomètres employés.

162. Discussion. — Quelques indications numériques sont maintenant nécessaires pour savoir ce qu'on peut négliger dans la théorie de l'écoulement :

1° Le volume total occupé par le fluide ne varie que de $\frac{1}{400}$ par le déplacement maximum du mercure dans le manomètre; on peut donc le regarder comme constant dans toute l'étendue des expériences.

2° La densité du fluide atteint 0,8 sous 110^{atm}; il est donc indispensable d'en tenir compte dans l'évaluation de la pression motrice, qui n'est due qu'à l'excès de la densité du mercure sur celle du fluide.

3° Sous la densité 0,5 et la pression de 77^{atm}, à 32° environ, c'est-à-dire près du point critique, la variation absolue de densité par atmosphère a atteint 0,17 dans les expériences de Warburg; c'est une variation absolue de 0,0022 par centimètre de mercure. La densité de part et d'autre du tube capillaire peut donc différer de 0,033 au maximum lorsque l'écoulement se fait sous une différence de pression de 15^{cm} de mercure; c'est une différence relative de $\frac{1}{14}$ environ dont il faudra tenir compte.

4° Le volume de fluide compris entre les repères 0, 2 (*fig.* 50) n'atteint guère que 0,002 du volume total; le changement de densité de ce tout petit volume qui passe de l'extérieur à l'intérieur n'a donc qu'un retentissement inappréciable sur la densité et la pression générales dans l'espace extérieur au tube $fe'ld'$.

5° La hauteur totale du liquide depuis le mercure du manomètre jusqu'au fond de l'éprouvette en d n'atteint pas 30^{cm}; la pression ne varie donc par suite du poids du fluide que de 1^{cm} de mercure environ; la densité du fluide n'augmente donc du haut en bas de l'appareil que de 0,0022, soit $\frac{1}{250}$ au maximum. La variation due à la même cause est encore moindre dans le tube à frottement, où la hauteur est moindre.

Il suffit donc de tenir compte de la variation de densité sous l'action de la pression motrice, pour l'évaluation de la quantité qui passe. Mais, dans l'évaluation de la pression motrice, on peut calculer toutes les pressions hydrostatiquement, en attribuant au fluide une même densité constante dans tout l'appareil, ρ, celle qui correspond à la température du bain et à la pression P du manomètre.

163. Théorie de l'expérience. — *Pression motrice.* — La pression motrice est l'excès de la pression extérieure sur la pression intérieure, au même niveau. Soient :

z la hauteur du mercure intérieur;

z' la hauteur du mercure extérieur au tube fdd', au-dessus d'un plan de repère;
S la section intérieure;
S' la section extérieure de l'espace annulaire;

on a

$$(1) \qquad p = g(\rho_{Hg} - \rho_{CO^2})(z - z') + \eta - \eta',$$

en appelant η et η' les deux corrections capillaires interne et externe;

$$(2) \qquad S\,dz = S'\,dz'.$$

Une série de lectures des z et z' correspondants a donné $\frac{S}{S'}$ ou σ, environ 0,43. La correction capillaire $\eta - \eta'$ est extrêmement incertaine; on a choisi le diamètre extérieur du tube dd' de manière à la rendre très petite. Des mesures directes comprises entre $0^{cm},01$ et $0^{cm},3$ ont donné en moyenne $0^{cm},14$; il en résulte une incertitude comprise entre $\frac{1}{30}$ et $\frac{1}{100}$ sur la pression motrice, celle-ci variant de 8^{cm} à 15^{cm} de mercure.

Des équations (1) et (2) nous tirons

$$(3) \qquad p = az + \eta - \eta', \qquad \frac{\partial p}{\partial t} = a\frac{\partial z}{\partial t}, \qquad a = g(\rho_{Hg} - \rho_{CO^2})(1 + \sigma).$$

Débit. — La masse Q qui a traversé le tube capillaire est

$$(4) \qquad Q = \rho[V_0 - S(z - z_0)],$$

en appelant V_0 le volume compris entre l'orifice du tube e et le premier repère o, dont le niveau est z_0. On a donc

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = [V_0 - S(z - z_0)]\frac{\partial \rho}{\partial t} - \rho S\frac{\partial z}{\partial t},$$

$$(5) \qquad \frac{\partial Q}{\partial t} = \left[\left(V_1 - \frac{Sp}{a}\right)\frac{\partial \rho}{\partial P} - \rho\frac{S}{a}\right]\frac{\partial p}{\partial t}$$

en posant $V_1 = V_0 + Sz_0 - S\frac{\eta - \eta'}{a}$.

Soit R la résistance du tube pour une viscosité égale à 1 :

$$(6) \qquad R = \frac{8l}{\pi r^4},$$

en appelant l et r la longueur et le rayon du tube capillaire. L'écoulement permanent, assez lent pour qu'on puisse négliger la correction

de force vive, obéit à la loi de Poiseuille, à la condition de prendre, pour le débit en volume, le quotient de la masse qui passe $\frac{\partial Q}{\partial t}$ par sa densité moyenne dans le tube, ρ_m, et d'employer la viscosité moyenne :

$$(7)\qquad p = \mu_m \frac{R}{\rho_m}\frac{\partial Q}{\partial t},\qquad \rho_m = \rho - \frac{p}{2}\left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right);\qquad \mu_m = \mu - \frac{p}{2}\left(\frac{\partial \mu}{\partial P}\right);$$

nous avons vu que $\frac{1}{\rho}\, p \frac{\partial \rho}{\partial P}$ ne dépasse pas $\frac{1}{14}$; la densité ne diffère donc de ρ_m que de moins de $\frac{1}{28}$; les corrections du deuxième ordre, en fonction de la densité, sont donc certainement négligeables. Même conclusion pour μ_m; mais la *variation de μ avec la pression a la même importance que celle de ρ*, car l'expérience donne des valeurs de $\frac{\rho}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial p}$ supérieures à 1, lorsque la densité dépasse 0,45; Warburg a oublié d'en tenir compte.

104. Intégration. — Éliminons $\frac{\partial Q}{\partial t}$ entre (5) et (7), il vient

$$(8)\qquad p\left(\rho - \frac{p}{2}\rho'\right) = -R\left(\mu - \frac{p}{2}\mu'\right)\left(\rho\frac{S}{a} - V_1\rho' + \rho'\frac{S}{a}p\right)\frac{\partial p}{\partial t}$$

en posant

$$\rho' = \frac{\partial \rho}{\partial P},\qquad \mu' = \frac{\partial \mu}{\partial P}.$$

Cette équation en $\frac{\partial p}{\partial t}$ et p s'intègre facilement, surtout si l'on se rappelle que les termes en ρ', μ' ne sont que de petits termes de correction (1), ce qui permet d'écrire en développant

$$(9)\qquad \frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial t}\left[1 + p\left(\frac{3\rho'}{2\rho} - \frac{\mu'}{2\mu}\right)\right] = -\frac{a}{\mu RS}\left(1 + \frac{V_1 a}{S}\frac{\rho'}{\rho}\right)$$

et en intégrant

$$(10)\qquad \log\frac{p_0}{p} + (p_0 - p)\left(\frac{3\rho'}{2\rho} - \frac{\mu'}{2\mu}\right) = (t - t_0)\frac{a}{\mu RS}\left(1 + \frac{V_1 a}{S}\frac{\rho'}{\rho}\right).$$

Cette formule équivaut numériquement à celle qu'a employée

---

(1) En particulier $V_1\rho'$ est égal à $\frac{S}{a}\,p\rho'$, en désignant par p une pression de l'ordre de l'unité; $V_1\rho'$ est donc une fraction $\frac{p\rho'}{\rho} < \frac{1}{14}$ du terme principal $\frac{S}{a}$.

Warburg pour le calcul de ses expériences, si l'on efface le terme en μ' qu'il a oublié.

Lorsque la pression motrice tombe de p_0 à p_1, entre les deux marques o, 1, l'équation (10) donne μ par la formule

$$\mu = (t_1 - t_0)\frac{a}{RS}\frac{1}{\log\frac{p_0}{p_1}}\left\{\frac{1+\frac{V_1 a}{S}\frac{\rho'}{\rho}}{1+\frac{p_0-p_1}{\log\frac{p_0}{p_1}}\left(\frac{3}{2}\frac{\rho'}{\rho}-\frac{\mu'}{2\mu}\right)}\right\}.$$

165. Discussion. — La parenthèse diffère très peu de 1; elle est sensiblement égale à $\frac{1}{1+\frac{p_0}{2}\left(\frac{\rho'}{\rho}-\frac{\mu'}{\mu}\right)}$, car $\frac{V_1 a}{S}$ et $\frac{p_0-p_1}{\log\frac{p_0}{p_1}}$ diffèrent peu de p_0.

Le dénominateur de Warburg, $1+\frac{p_0}{2}\frac{\rho'}{\rho}$ sensiblement, est toujours supérieur à 1 (maximum 1,030 à 1,045 suivant la température au voisinage de la densité 0,5). Le dénominateur vrai $1+\frac{p_0}{2}\frac{\rho'}{\rho}\left(1-\frac{\rho\mu'}{\rho'\mu}\right)$ a une allure différente. On voit, en effet, directement sur la courbe de Warburg (*fig.* 51) que $\frac{\rho\mu'}{\rho'\mu}$ varie depuis 0,2 environ pour $\rho = 0,20$, à 1 pour $\rho = 0,50$, et jusqu'à 1,6 pour $\rho = 0,80$. Le dénominateur est donc à peine supérieur à 1 de moins de 0,01 pour les faibles densités, égal à 1 vers la densité critique, et à peine inférieur à 1 pour les fortes densités.

En un mot, la variation de viscosité compense presque exactement l'influence de la variation de densité: les valeurs de seconde approximation de Warburg, celles qu'il désigne par μ, sont moins près de la vérité que celles de première approximation, qu'il désigne par μ', données de la formule simple

$$\mu = (t_1 - t_0)\frac{a}{RS}\frac{1}{\log\frac{p_0}{p_1}}.$$

166. Résultats. — En conséquence, ce sont les valeurs de première approximation de Warburg que je transcris, d'après son Tableau XI (p. 417), pour le gaz le plus pur (moins de 0,001 d'air); elles sont exprimées en C.G.S. La densité ρ est prise par rapport à l'eau. Les pressions P, tirées du Tableau XIV de Warburg, sont mesurées en atmosphères.

Densité ρ.	32°,6. μ.	32°,6. P.	40°,3. μ.	40°,3. P.
0,800.........	678.10⁻⁶	107,3		
0,730.........	575	88,5	581.10⁻⁶	114,6
0,660.........	496	80,7	500	101,6
0,590.........	426	78,2	428	94,9
0,520.........	367	77,6	369	91,7
0,450.........	315	77,2	319	89,2
0,380.........	273	76,6	277	86,8
0,310.........	241	74,6	244	82,7
0,240.........	214	69,9	219	75,9
0,170.........	189	60,3	197	64,3
0,100.........		43,1	181	45,3

A ces températures, peu supérieures à la température critique, la viscosité est définie par la densité, et non par la pression; aux fortes densités, elle varie très peu avec la température. C'est le contraire de la viscosité des gaz peu denses, qui est indépendante de la densité, et pour l'anhydride carbonique, presque proportionnelle à la température absolue, ce qui produirait un accroissement de $\frac{1}{40}$ environ entre 32° et 40°, de même ordre que l'excès obtenu aux densités inférieures à 0,300.

A l'état liquide, à 25°,1, Warburg a obtenu des résultats analogues (0,0005 d'air) :

ρ..............	0,896	0,875	0,858	0,827	0,809
μ..............	800.10⁻⁶	741	703	665	628
P..............	105	95	85	75	70

A diverses températures sous la pression de vapeur saturante (0,002 d'air) (¹) :

t........	5	10	15	20	25	29
ρ........	0,922	0,895	0,864	0,827	0,783	
μ........	925.10⁻⁶	852	784	712	625	539

Ces viscosités ne sont guère que le $\frac{1}{15}$ de celle de l'eau.

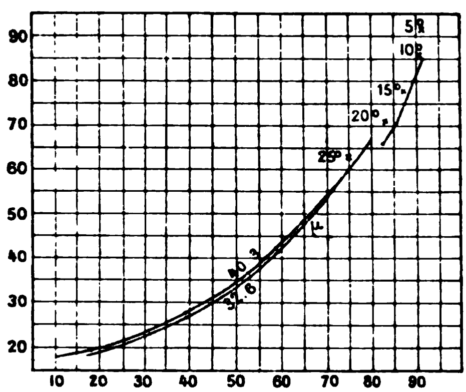
Tous ces résultats sont groupés dans les courbes isothermes ci-jointes, qui montrent bien l'influence prédominante de la densité, prise en abscisse, même à température largement variable, sous pres-

(¹) ρ est tiré des observations d'Andreef (*Ann. de Liebig*, t. CX, 1859). — Peut-être cette différence d'origine des valeurs adoptées pour ρ explique-t-elle pourquoi le point [illegible] de ce tableau ne se place pas sur la courbe isotherme 25°.

sion de vapeur saturante [points isolés (*fig.* 51)]. En conséquence, dans tous les essais de coordination, c'est non la température, mais la densité qui est pour les liquides la variable indépendante naturelle et importante dont dépend la viscosité.

La position de la courbe de 25°,1 qui est à la fois au-dessous de celle de 32° et de celle de 5°-15°, sous la densité de 0,85, montre qu'il y a un minimum de viscosité en fonction de la température entre 20° et 30°, sous cette densité.

Fig. 51.



Abscisses ρ; ordonnées 10^5 μ.

Peut-être pourrait-on étendre cette remarque de M. Warburg, et penser que la faible influence de la température dans ses expériences indique un minimum de viscosité sous toute densité au voisinage de la température critique.

CHAPITRE IV.

…EUILLE ET LE RÉGIME HYDRAULIQUE.
… D'UN RÉGIME A L'AUTRE.

… — L'écoulement lent d'un liquide par un … de Poiseuille ; si l'écoulement est très … unité de longueur s'obtient en prenant … les pressions extrêmes à la longueur ; si le … faire la correction de la force vive du … : mais, dans les deux cas, le mouve… est le même, la distribution des vitesses … ce régime, *régime de Poiseuille*.

… ce n'est pas celui qu'on observe dans les … l'eau, les canaux : la perte de charge par … proportionnelle au carré du débit ;

… le passage d'un régime à l'autre n'a … d'une vitesse déterminée, mais il existe … possibles et alternent … grande.

… que nous allons étudier.

TRAVAUX DE HAGEN.

… Hagen, … et ingénieur … Poiseuille. Il fit … dans … d'assez larges … Hagen rap… *…lungen* … à une

… sous une

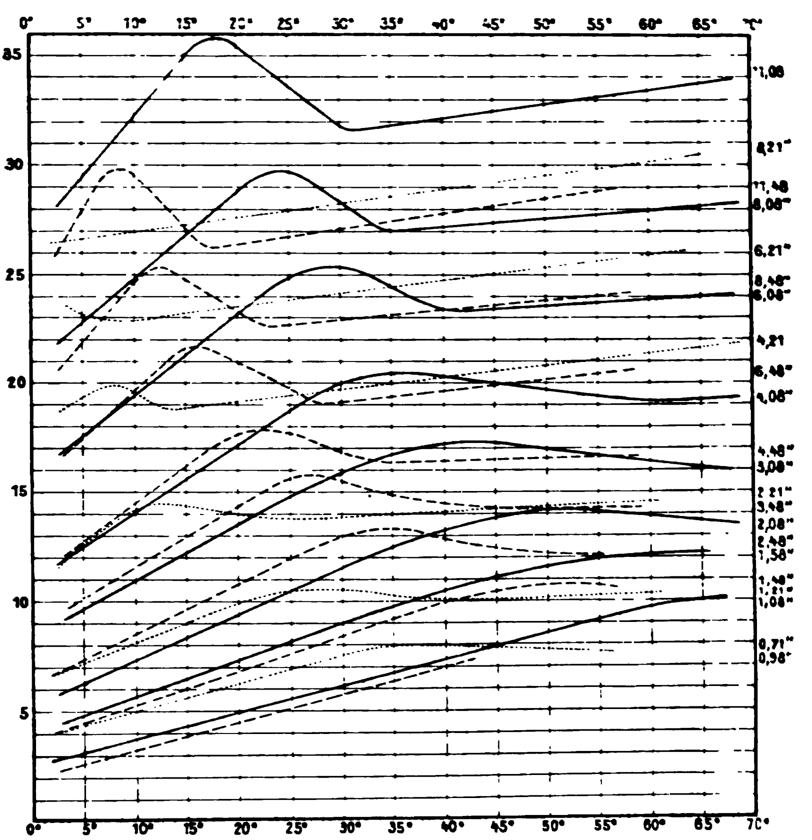
chute de pression constante dans trois tubes dont voici les éléments :

	Longueur.	Diamètre.
	cm	cm
Premier tube............	47,2	0,28
Deuxième tube..........	109	0,40
Troisième tube..........	104	0,60

Les résultats ont été représentés par des courbes tracées en prenant les températures pour abscisses et les débits pour ordonnées : chaque courbe correspond à un tube et à une chute de pression donnée.

La Planche de Hagen est reproduite exactement dans la figure 52.

Fig. 52.



Tube étroit ▬▬. Tube moyen ----. Tube large ·······
Températures centigrades en abscisses. Vitesses en pouces du Rhin en ordonnées.
Les charges relatives à chaque courbe (en pouces d'eau) sont inscrites à droite.

Considérons les courbes en trait continu, relatives au tube étroit. Les premières courbes correspondent à une faible pression ; ces

courbes sont ascendantes, mais tournent leur concavité vers le bas et annoncent un maximum qui n'est, d'ailleurs, pas atteint dans les limites des observations. Les courbes qui correspondent à une pression plus forte (15^{cm} d'eau) présentent un maximum et annoncent un minimum.

Enfin les trois courbes supérieures correspondent à des pressions plus fortes encore (20^{cm} à 25^{cm} d'eau). Le maximum est très accusé et le minimum est très net, puis la montée de la courbe continue d'une façon à peu près rectiligne, mais moins rapide que la montée du début.

Comme on le voit, à mesure que la pression augmente, le maximum et le minimum reculent vers les basses températures et se rapprochent l'un de l'autre en même temps que leur différence s'accuse davantage. Leur position dépend d'ailleurs du diamètre du tube.

Cela nous montre en passant que, si l'on veut étudier l'influence de la température sur la viscosité, il faut opérer sous des pressions très faibles ou très élevées, de manière à se placer dans une région bien définie de la courbe, en dehors de la région troublée du maximum et du minimum.

169. Cause du maximum et du minimum. — A quoi tiennent ce maximum et ce minimum? La description des phénomènes faite par Hagen lui-même, puis par Osborne Reynolds (1883), et enfin par Couette (1890), en fournit l'explication.

Avant le maximum, le débit est régulier, sans soubresauts ; l'observation de la veine la montre lisse et régulière; Hagen la compare à une baguette de verre lisse.

Au voisinage du maximum et entre le maximum et le minimum, le jet devient trouble et jaillit par soubresauts violents et irréguliers. Hagen crut d'abord que ce phénomène tenait à un défaut dans le montage de l'expérience; mais, en comparant un très grand nombre d'expériences, il vit qu'il s'agissait là d'un phénomène normal.

Après le maximum et le minimum, la veine est régulière, sans soubresauts, mais elle n'est plus lisse comme auparavant; la surface du jet est craquelée, comme couverte de toutes petites rides.

Les soubresauts qui se produisent entre le maximum et le minimum proviennent du passage très rapide et alternatif d'un régime à l'autre.

Il est alors facile de se rendre compte de l'allure des courbes qui représentent la variation du débit en fonction de la température.

Quand la pression est assez faible, le régime à la température ordinaire est celui de Poiseuille; la vitesse est dirigée partout sui-

vant l'axe du tube. Quand la température croît, le coefficient de frottement diminuant, la force vive des mouvements de la veine croît: au début cet accroissement ne se traduit que par une augmentation du débit : le mouvement devient plus rapide mais reste rectiligne: c'est encore le régime de Poiseuille. La température continuant de croître et la viscosité de diminuer, les mouvements irréguliers ne sont pas assez rapidement amortis pour que le mouvement reste sensiblement rectiligne: des mouvements ondulatoires se produisent dans le liquide, exagèrent les inégalités de vitesse et dissipent proportionnellement plus d'énergie que le régime de Poiseuille, pour le même débit; de là résulte l'existence d'un maximum dans la courbe des débits en fonction de la température.

La température continuant de croître, les ondulations prennent une importance croissante, d'abord, puis stationnaire; le régime se régularise et le débit augmente de nouveau.

Ce qui se passe ainsi à pression constante, quand on augmente progressivement la température, est l'image de ce qui se passe à température constante quand on accroît progressivement la pression.

L'absence de mouvements ondulatoires dans le régime de Poiseuille, leur apparition dans la région troublée et leur permanence dans le deuxième régime, peuvent être mis en évidence en mêlant au liquide de petites poussières qui y restent en suspension. Elles se meuvent parallèlement à l'axe du tube avant le maximum, et suivent un trajet sinueux dans le deuxième régime.

170. Théorie de Hagen sur le changement de régime. — Hagen est parti d'une idée inexacte mais intéressante. On sait que la distribution des vitesses à l'intérieur d'un tube, dans le régime de Poiseuille, est donnée par la formule

$$u = \frac{\rho g h}{4 \mu l}(R^2 - r^2), \tag{1}$$

dans laquelle h désigne la hauteur équivalente à la pression motrice (évaluée en colonne du liquide), sous laquelle se fait le mouvement, u la vitesse à la distance r de l'axe, et R le rayon du tube. Hagen croyait que la vitesse en chaque point est proportionnelle à la distance à la paroi; rectifions cette erreur et adoptons cependant le mode de raisonnement de Hagen tout en nous servant des résultats de Poiseuille.

Si l'on augmente h, u croît sans limite. D'autre part, si l'on pro-

duisait l'écoulement *sous la même pression motrice,* non à travers un tube mais à travers un orifice percé en mince paroi, la vitesse u_1 à la sortie serait

$$u_1 = \sqrt{2gh}.$$

Comme le tube introduit des résistances, on doit certainement avoir

$$u < u_1.$$

En particulier, si l'on appelle u_0 la vitesse sur l'axe, on doit avoir

$$u_0 < u_1.$$

Cela posé, d'après la loi de Poiseuille, on a

$$u_0 = \frac{\rho g R^2}{4\mu l} h.$$

Pour une valeur donnée de l, u_0 croissant proportionnellement à h, et u_1 proportionnellement à $\sqrt{h}$ seulement, u_0, d'abord plus petit que u_1, lui devient égal pour une certaine valeur de h, et supérieur au delà; ce qui est absurde.

Nous savons maintenant comment on échappe à cette difficulté; nous avons vu en effet que le jet se forme à la sortie du tube, aussi bien qu'à travers un trou en mince paroi, et que la formule exacte pour u_0 n'est pas

$$u_0 = \frac{\rho g R^2}{4\mu l} h.$$

mais

$$\rho g h = \frac{8\mu l}{\pi R^4} I + \frac{\rho I^2}{(\pi R^2)^2},$$

qui tient compte de cette force vive, et donne pour le débit I — mais non à la vérité pour la vitesse axiale $2I:\pi R^2$ — une valeur toujours inférieure à celle de l'orifice en mince paroi $\pi R^2 \sqrt{2gh}$, sous la même charge. La difficulté n'existe donc pas pour nous.

Au lieu de s'apercevoir du rôle du jet à la sortie du tube capillaire, Hagen fit l'hypothèse, qui conserve quelque chose d'intéressant, que le paradoxe correspond à l'existence des deux régimes, et que le passage d'un régime à l'autre se fait au moment où les deux vitesses deviennent égales. La pression h qui correspond à cette valeur critique est donnée par l'équation

$$\frac{\rho g R^2}{4\mu l} h = \sqrt{2gh},$$

d'où l'on tire

$$h = \left(\frac{8\mu l}{\rho R^2}\right)^2 \frac{1}{2g}.$$

La vitesse critique serait donc

$$u_0 = u_1 = \frac{8\mu l}{\rho R^2},$$

et le débit correspondant

$$\frac{4\pi\mu l}{\rho}.$$

Ce débit serait proportionnel à l et indépendant de R.

Tel serait le calcul correct.

Mais ce n'est pas la loi obtenue par Hagen, car ce physicien a fait le calcul de I en partant de l'hypothèse fausse indiquée plus haut, que la vitesse en un point du tube est proportionnelle à la distance de ce point à la paroi. Dans ces conditions, le débit serait proportionnel à la vitesse U que possède le liquide sur l'axe du tube et, par conséquent, le débit critique serait proportionnel à $\frac{l}{R^2}$, comme u_0. C'est la loi à laquelle aboutit Hagen.

171. Comparaison des expériences de Hagen avec sa théorie. — Dans son expérience, sous pression constante, Hagen décompose donc le phénomène théorique en deux phases : 1° débit constamment croissant, en raison inverse de la viscosité, jusqu'à la valeur $\pi R^2\sqrt{2gh}$; 2° débit constant quelle que soit la viscosité. Le débit critique serait donc un débit maximum. Hagen suppose que le débit maximum observé est précisément le débit critique; mais, au lieu de le comparer à la valeur simple $\pi R^2\sqrt{2gh}$, et de s'apercevoir de suite que le débit maximum est beaucoup plus petit, Hagen le compare à la valeur fausse qu'il a calculée en fonction de la viscosité.

Hagen ayant déduit de la première partie de ses expériences la loi de variation de μ avec la température, calcula quelle devait être la position du maximum de débit pour chaque pression quand on construit la courbe du débit en fonction de la température. Il compara ensuite les positions calculées de ces maxima avec les positions indiquées par les graphiques qui représentaient les observations directes.

Hagen avoue que la concordance n'est pas bonne, et il suffit, pour se convaincre qu'il a raison, de jeter les yeux sur ses nombres.

Il a utilisé trois tubes. Pour le premier $\left(\frac{l}{R} = 540\right)$ la concordance

est bonne (à 1° près de 0° à 35°). Pour le second $\left(\frac{l}{R} = 336\right)$, il faudrait ajouter 14° à toutes les températures calculées pour obtenir les températures observées des maxima. Pour le troisième $\left(\frac{l}{R} = 350\right)$, les températures calculées sont encore trop faibles de 10°. Contrairement à Hagen, mais sans citer de nombres, Franz Neumann affirme pourtant que la concordance des nombres calculés et observés est satisfaisante, et cette affirmation a été répétée depuis.

172. Comparaison des expériences de Hagen avec les vues d'O. Reynolds. — Nous connaissons maintenant la loi véritable du phénomène, d'après les expériences plus récentes d'*Osborne Reynolds:* le débit limite est proportionnel à $\frac{\mu}{\rho R}$; la longueur l n'intervient pas.

Si l'on relève sur les planches de Hagen le débit maximum pour les trois tubes à des températures comprises entre 0° et 52°, puis qu'on fasse pour chaque couple de tubes les rapports de ces débits maximum, chaque rapport correspondant à une température donnée, on trouve que ces rapports, pour deux tubes donnés, sont à peu près égaux. Si la loi de Hagen est vraie, cette valeur commune des rapports doit être égale au quotient des valeurs de $\frac{l}{R^2}$. On trouve qu'elle en est très différente, mais qu'elle est à peu près égale au rapport inverse des diamètres. C'est donc la loi d'Osborne Reynolds qui est la vraie.

Voici d'ailleurs les nombres :

1° *Tubes* A et B.

Rapport des diamètres $\frac{A}{B}$ . . .	0,69					
Rapport des valeurs de $\frac{l}{R^2}$ . .	1,09;					
Rapports des débits $\frac{B}{A}$	0,56	0,58	0,59	0,63	0,70	0,75

2° *Tubes* B *et* C.

Rapport des diamètres $\frac{C}{B}$ . . .	0,68;					
Rapport des valeurs de $\frac{l}{R^2}$ . .	0,435					
Rapports des débits $\frac{B}{C}$	0,57	0,67	0,65	0,65	0,70	0,63

Il n'y a donc pas le moindre doute ; la loi de Hagen est absolument fausse et, cependant, ses expériences étaient suffisantes pour qu'on pût entrevoir la loi véritable.

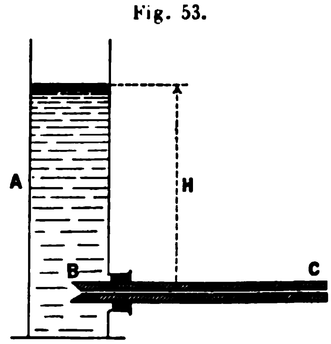
Malgré cela, le mémoire de Hagen reste important. Il contient d'abord bien des remarques intéressantes ; en outre, c'est le premier où soit faite bien nettement la distinction entre les deux régimes et où le phénomène soit correctement décrit.

Il ne semble pas cependant que ce Mémoire ait beaucoup attiré l'attention quand il parut. Les physiciens et les hydrauliciens ont continué à s'ignorer les uns les autres, ou même à se contredire. Il faut aller jusqu'à Osborne Reynolds (1883) pour trouver de nouvelles études expérimentales sur la même question.

II. — EXPÉRIENCES DE COURS DESTINÉES A MONTRER LES DEUX RÉGIMES ET LE PASSAGE DE L'UN A L'AUTRE.

173. Expériences sur le mercure. — Un tube capillaire BC est adapté horizontalement à une éprouvette à pied A pleine de mercure (*fig.* 53). Il est bon que le tube se termine en entonnoir à l'entrée, sans quoi le régime de Poiseuille ne s'établit qu'avec peine.

Fig. 53.



L'éprouvette étant pleine de mercure, on laisse l'écoulement se produire par le tube capillaire. Au début, l'écoulement se faisant sous une forte pression, c'est le régime hydraulique qui s'établit : le jet qui sort est régulier, mais la veine n'est pas lisse. A mesure que le mercure s'écoule la pression motrice diminue; à un certain moment, la période troublée commence; le régime de Poiseuille (veine lisse) commence à se montrer par intermittences; chaque fois qu'il

s'établit, le jet s'allonge, montrant que le débit augmente et que la résistance diminue; mais le régime hydraulique reprend bientôt, la veine se trouble tout d'un coup et en même temps le jet se courbe davantage et son amplitude diminue.

Le jet oscille ainsi par soubresauts, d'une amplitude à l'autre. Tout d'abord, les oscillations sont rares, c'est l'amplitude faible qui est le plus souvent réalisée; le régime hydraulique domine. Puis, la hauteur diminuant toujours, les oscillations deviennent plus fréquentes pour redevenir rares ensuite, l'amplitude forte étant maintenant plus souvent réalisée; le régime de Poiseuille domine. Enfin, au-dessous d'une certaine valeur de la pression motrice, le régime de Poiseuille subsiste seul, la veine est lisse et les oscillations ont disparu.

On a obtenu de très bons résultats [1] avec des tubes de 1^{mm} de diamètre dont les longueurs ont varié de 30^{cm} à 3^{cm}.

Premier tube. — Longueur 30^{cm} environ.

$H > 15^{cm}$	Régime hydraulique. Veine trouble. Jet régulier.
$15^{cm} > H > 6$	Période des battements d'abord très faibles quand H est voisin de 15^{cm}, atteignant ensuite une amplitude énorme quand H diminue, puis le régime de Poiseuille domine avec retours rares à l'amplitude faible.
$H < 6$	Régime de Poiseuille établi. Veine lisse. Jet régulier.

L'amplitude des oscillations est d'autant plus grande que le tube est plus long.

Deuxième tube. — Longueur $18^{cm},9$.

$H > 56^{mm},7$	Régime hydraulique régulier.
$H = 56,7$	Commencement des oscillations.
$H = 48,8$	Grandes oscillations continuelles entre les deux régimes.
$H = 30,0$	Fin de la période troublée. Commencement du régime de Poiseuille.

Troisième tube. — Longueur 35^{cm}.

$H > 160^{mm}$	Régime hydraulique.
$H = 136$	Oscillations sensibles.
126	» grandes.
$73,9 < H < 122$	Oscillations d'énorme amplitude.

---

(1) Leçon du 4 février 1899.

$H < 73^{mm},9$ Le régime de Poiseuille domine avec quelques chutes brusques d'amplitude (retours subits au régime hydraulique).

$H = 68,1$ Fin du régime troublé. Commencement du régime de Poiseuille.

Comparaison des deux débits limites des deux derniers tubes. — D'après la loi d'Osborne Reynolds, ces débits limites devraient être égaux, car les deux tubes ont même diamètre.

Rapport des pressions limites.....................	2,4
Rapport des longueurs..........................	1,9
Rapport des débits d'après la loi de Poiseuille......	$1,9 \times \frac{1}{2,4} = 0,8$

La loi de Reynolds est sensiblement vérifiée.
La loi de Hagen donnerait 1,9.

174. Expériences avec l'eau. — *Première expérience.* — Même appareil qu'avec le mercure, mais les tubes sont coupés droits. Les dimensions indiquées par Couette (Thèse) ont été adoptées :

$$l = 28^{cm}, \qquad D = 0^{cm},26.$$

On a obtenu les résultats suivants :

$H < 75^{cm}$ Régime hydraulique. Jet régulier. Veine trouble.
$35^{cm} < H < 75^{cm}$ Oscillations irrégulières.
$H < 35^{cm}$ Régime de Poiseuille. Veine lisse. Jet régulier.

La longueur du tube était un peu faible pour le diamètre, les battements avaient une faible amplitude. Il aurait fallu prendre une longueur de 60^{cm} environ et alors adapter le tube à un récipient plus haut (au moins 1^{m} de hauteur).

Deuxième expérience. — Si le tube est très court, la pression à laquelle le régime de Poiseuille peut s'établir est trop faible pour qu'il y ait un jet. On peut encore montrer l'oscillation entre les deux régimes dans ce cas au moyen des vibrations de la goutte au bout du tube.

Voici comment l'expérience est disposée :

On prend un tube ayant 1^{mm} de diamètre et 5^{cm} ou 6^{cm} de longueur, on l'adapte à une éprouvette tubulée remplie d'eau, ayant 20^{cm} de hauteur. Pour régulariser l'écoulement lent et la formation des gouttes, on place à cheval sur le tube et tout près de l'extrémité une bande de papier à filtrer.

Au début de l'expérience, quand l'éprouvette est encore pleine d'eau, la pression est suffisante pour que le liquide sorte en jet ; mais bientôt, la hauteur d'eau diminuant, le jet se recourbe complètement pour donner au bout du tube une goutte qui vibre avec une période très petite entre deux positions extrêmes, où la goutte prend deux formes très différentes correspondant l'une au régime de Poiseuille, l'autre au régime hydraulique. Le liquide continue à s'écouler de cette goutte le long de la bande de papier. L'amplitude des vibrations décroît à mesure que la hauteur d'eau diminue dans l'éprouvette, leur fréquence restant très grande. Brusquement, pour une hauteur déterminée, la goutte garde une immobilité complète ; sa forme ainsi fixée correspond au régime de Poiseuille ([1]).

Application. — Grâce à l'artifice du papier filtre, il est possible de faire des mesures de viscosité correctes avec un tube dont l'extrémité n'est pas immergée.

Il faut seulement mesurer la courbure de la goutte stable (par exemple en projetant son image agrandie sur un écran, ou par réflexion comme pour un miroir convexe) et faire la correction capillaire correspondante, minime dès que la goutte a un rayon supérieur à 2^{mm} ou 3^{mm}.

Débits limites. — Deux autres expériences ont été faites avec deux autres tubes pour vérifier la loi d'Osborne Reynolds relative au débit limite.

La mesure des débits limites, faite grossièrement mais directement au voisinage du maximum, a donné :

Premier tube....................	$7^{cm^3},3$
Deuxième tube..................	$7^{cm^3},3$

Comme les diamètres étaient égaux, la loi d'Osborne Reynolds est bien vérifiée.

D'ailleurs on avait :

Rapport des longueurs................	2
Rapport des pressions limites..........	1,8
Rapport des débit limites.............	$\frac{1,8}{2} = 0,9$
D'après Osborne Reynolds, il faut trouver....	1
D'après Hagen, on devrait trouver...........	1,9

([1]) Leçon du 4 février 1899.

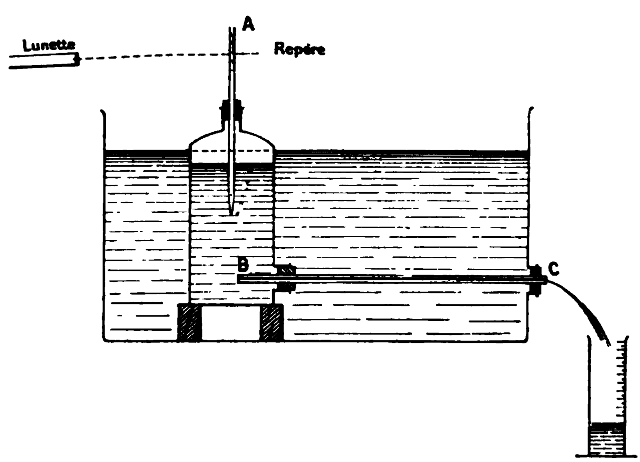
175. **Étude de la variation de débit d'un même tube, sous la même pression, à diverses températures.** — On a répété les expériences de Hagen [1].

Les limites de température doivent être suffisantes pour que le tube présente successivement les deux régimes réguliers avec la période troublée entre les deux. On a choisi les dimensions suivantes pour le tube capillaire :

Longueur....................	60^{cm}
Diamètre....................	$0^{cm},28$

Ce tube BC a été adapté horizontalement à un vase de Mariotte de manière à maintenir la pression bien constante (20^{cm} d'eau) (*fig.* 54).

Fig. 54.



Le tout, plongé dans une grande cuve remplie d'eau pour obtenir une température déterminée et bien constante. Le tube capillaire sort de la cuve à travers un bouchon.

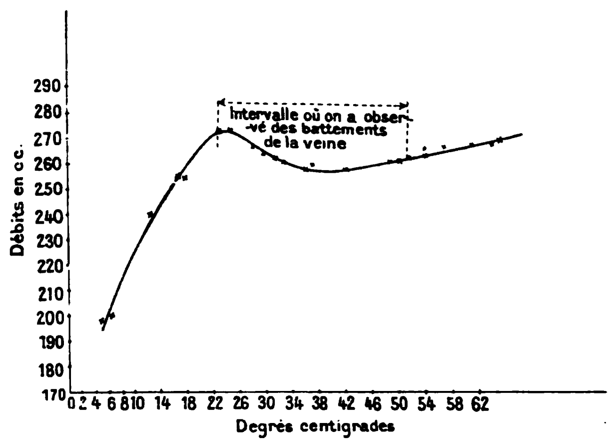
La pression de 20^{cm} d'eau a été repérée chaque fois sur le tube vertical du vase de Mariotte et maintenue constante, à $0^{mm},5$ au moins. Ce tube était toujours enfoncé de la même quantité dans le vase de Mariotte, de manière que son extrémité effilée fût toujours exactement à la même hauteur au-dessus du fond du vase. La constance de sa position à $0^{mm},5$ près assurait la constance de la pression à $\frac{1}{400}$ près (en négligeant la variation de densité de l'eau).

(1) Leçon du 4 février 1899.

On recueillait dans une éprouvette graduée l'eau écoulée pendant 60 secondes. La température adoptée était celle de l'eau écoulée prise à l'instant même où on la recueillait.

Une seule courbe a été tracée entre 4° et 60°; elle a la forme signalée par Hagen. La figure 55 la représente.

Fig. 55.



Les deux régimes et la période troublée y sont nettement visibles. Au début, régime de Poiseuille; les débits croissent rapidement avec la température. Les troubles commencent vers 22°; le débit maximum est atteint et la période des battements commence. Le débit décroît lentement, passe par un minimum vers 40° et remonte lentement; vers 50°, on a encore de faibles battements. A 50°, le régime hydraulique s'établit régulièrement; le débit croît lentement avec la température.

Le débit maximum a été de 270^{cm^3}; le minimum de 254^{cm^3}. Pour obtenir un écart plus grand avec le même tube, il aurait fallu opérer sous une pression plus élevée.

On remarquera que la courbe des débits en fonction de la température reste bien définie et régulière dans tout l'intervalle où les deux régimes alternent visiblement. Cela montre que la durée relative des deux régimes est une fonction bien définie de la viscosité sous chaque pression, et pour chaque tube; la période complète, comptée depuis l'établissement du régime de Poiseuille jusqu'à son premier retour, est également bien définie à chaque température.

III. — TRAVAUX D'OSBORNE REYNOLDS.

176. Calcul approché du débit limite qui marque l'apparition des mouvements ondulatoires. — Rappelons les équations générales du mouvement des liquides visqueux dans le cas où les vitesses de déformation sont assez faibles pour que les forces de frottement soient des fonctions linéaires des dérivées premières de ces vitesses. On a, pour un liquide pesant :

$$(1)\quad \begin{cases} -\dfrac{\partial p}{\partial x}+\mu\Delta u = \rho\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}+w\dfrac{\partial u}{\partial z}\right) \\ -\dfrac{\partial p}{\partial y}+\mu\Delta v = \rho\left(\dfrac{\partial v}{\partial t}+u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}+w\dfrac{\partial v}{\partial z}\right) \\ -\dfrac{\partial p}{\partial z}+\mu\Delta w-g z = \rho\left(\dfrac{\partial w}{\partial t}+u\dfrac{\partial w}{\partial x}+v\dfrac{\partial w}{\partial y}+w\dfrac{\partial w}{\partial z}\right) \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0.$$

La solution générale du problème serait fournie par l'intégration *rigoureuse* des équations en tenant compte des données à la surface limite. On ne sait la faire malheureusement que dans des circonstances particulières, par exemple quand le mouvement est parallèle à l'axe d'un tube cylindrique. On obtient alors le régime de Poiseuille qui est le régime stable pour les très faibles débits. Mais le problème vrai serait sensiblement différent ; le liquide s'étend bien au delà du tube, en amont dans le vase qui le fournit, en aval dans le réservoir qui le reçoit. C'est toute la masse du liquide qu'il conviendrait d'étudier depuis la première surface libre jusqu'à la seconde, en tenant compte de la forme des parois.

Nous avons cherché à évaluer l'influence des orifices d'entrée et de sortie du tube (nos **113-118**), seulement en supposant que le régime de Poiseuille est le régime stable et naturel dans presque toute la longueur du tube; mais nous n'avons pas pu examiner cette question de stabilité.

Or on ne sait pas, au point de vue mathématique, si, dans le cas simple de l'état permanent $\left(\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial w}{\partial t}=0\right)$, les équations (1), non linéaires, ont une solution unique, pour des conditions aux limites déterminées, ou si elles ont un nombre fini de solutions, d'inégale stabilité.

On ne sait donc pas si le régime hydraulique obéit aux équations (1), ou s'il exige des équations différentes; les théories hydrauliques ont toujours été développées en adoptant des relations non linéaires entre les forces de frottement et les vitesses de déformation; mais cela ne prouve rien : les cours d'eau réels, auxquels ces théories sont destinées, ont des parois très irrégulières, soit simplement rugueuses, soit tapissées de roseaux et d'herbes; ce qu'on appelle un état permanent est seulement un état assez régulièrement troublé au voisinage des parois; on se contente de considérer des éléments de volume assez grands, et des éléments de temps assez longs pour que l'état *moyen* soit permanent. Comme on fait entrer dans les forces de frottement *moyen* tout ce qui provient des troubles nés à la paroi et propagés vers l'intérieur, on est conduit, non seulement à des relations non linéaires, mais, pour l'intérieur du liquide, à des relations *non spécifiques,* en ce sens que les coefficients contiennent encore la position de l'élément par rapport à la paroi, et la nature de la paroi.

Rien ne permet de croire que les équations des hydrauliciens soient différentes de ce que donneraient les équations (1) (à viscosité linéaire) si l'on réussissait à analyser les troubles, périodiques ou non, qui naissent à la paroi, avec assez de précision pour former des valeurs théoriques des moyennes ([1]). Au contraire, la naissance du régime hydraulique dans les tubes de verre parfaitement lisses donne à penser que les équations (1) doivent suffire.

C'est à ce point de vue que s'est placé M. Osborne Reynolds au début d'un Mémoire expérimental important sur les causes du changement de régime ([2]).

Supposons que le caractère du mouvement dépende d'un seul paramètre de vitesse U, la vitesse moyenne le long du tube, et d'un seul paramètre linéaire c, le rayon du tube; éliminons les pressions des équations 1, par des dérivations croisées; il reste des termes de deux types; ceux qui proviennent des frottements ont en facteur

$$\frac{\mu}{\rho}\frac{U}{c^3},$$

([1]) Indiquons seulement les Mémoires de M. Boussinesq (*Théorie des eaux courantes, Sav. Etr.*), de M. Maurice Levy (*Thèse*) et de O. Reynolds (*On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion*, 1895).

([2]) *Phil. Trans. R. Soc. of London*, Vol. 174, 1883, p. 905, et *Scient. papers*, t. II, p. 51.

et ceux qui proviennent des accélérations ont en facteur

$$\frac{U^2}{c^2}.$$

L'importance relative des deux groupes de termes dépend du rapport

$$\frac{\rho c U}{\mu}$$

de ces deux coefficients.

La formation d'ondulations et le changement de régime doivent donc se produire au voisinage d'une valeur déterminée

$$\frac{\rho c U}{\mu} = \text{const.}$$

de ce rapport purement numérique.

Ce raisonnement toutefois prête à une objection; un tube est défini par deux paramètres linéaires, sa longueur et son diamètre; Reynolds ne s'occupe que de ce dernier. Si la longueur intervenait aussi, le critérium de stabilité prendrait la forme générale

$$\frac{\rho c U}{\mu} f\left(\frac{c}{l}\right) = \text{const.},$$

f étant une fonction à déterminer.

La règle de Hagen

$$\frac{\rho U c^2}{\mu l} = \text{const.}$$

en serait un cas particulier.

Toutefois, dans les tuyaux très longs, l'établissement du régime hydraulique est indépendant de la longueur, et la fonction $f\left(\frac{c}{l}\right)$, évidemment variable lorsque l diffère peu de c, devient certainement constante comme le suppose implicitement Reynolds pour les très petites valeurs de $\frac{c}{l}$. C'est d'ailleurs ce qu'ont montré ses expériences.

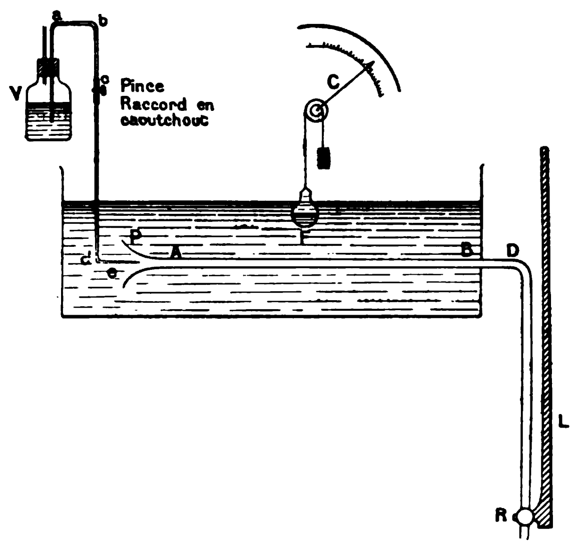
Plus tard [1] M. Reynolds a même réussi à montrer, d'après des considérations purement théoriques, d'ailleurs assez grossières, que sa constante critique est au moins égale à 517.

---

(1) *Ph. Trans.*, 1895, et *Sc. pap.*, t. II, p. 535.

177. Expériences d'Osborne Reynolds. Premier appareil. — L'appareil se compose d'un tube en verre AB, ayant $1^m,50$ de longueur, placé horizontalement à l'intérieur d'une cuve un peu plus longue (2^m), à paroi de verre, pleine d'eau (*fig.* 56).

Fig. 56.



Le tube est terminé à son extrémité amont par un pavillon P en bois verni, large à l'entrée, qui se raccorde sans discontinuité avec le tube. A l'autre extrémité, qui traverse la cuve en B, est adapté un tube d'acier recourbé verticalement, DR, terminé par un robinet R que commande un levier très long L. Le débit réglé par le jeu du robinet R est mesuré approximativement par l'abaissement d'un flotteur F qui entraîne une aiguille C devant un cadran divisé.

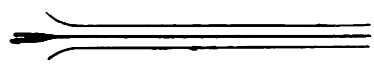
Un filet d'eau colorée par du permanganate de potassium s'écoule du flacon V par le tube fin *abde* dont l'extrémité effilée *e* débouche devant le pavillon P. Ce tube fin est interrompu en *c* et les deux morceaux sont reliés par un joint en caoutchouc qu'une pince peut serrer plus ou moins pour régler le jet coloré.

Quand le débit est très faible dans AB, le jet coloré se meut bien parallèlement à l'axe du tube, sans s'élargir, se rétrécir ni se mélanger (*fig.* 57).

Si le débit augmente, on voit le jet coloré, d'abord droit sur une certaine longueur, se brouiller brusquement à quelque distance de

l'entrée, et le liquide coloré se diffuser rapidement dans toute la partie du tube située en aval. En éclairant avec des étincelles électriques, on voit qu'à l'endroit où le jet cesse d'être régulier se

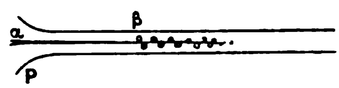
Fig. 57.



forment des tourbillons très déliés et l'on observe l'apparence de la figure 58.

Le point β où commencent les tourbillons est d'autant plus éloigné

Fig. 58.



de l'entrée P du tube que le mouvement est plus lent. Mais de toute façon, grâce à la présence du pavillon, la longueur $\alpha\beta$ de jet régulier est toujours assez grande.

A température constante, d'après les observations faites sur trois tubes de 25^{mm}, $12^{mm},5$ et 6^{mm} de diamètre, la loi limite paraît bien être

$$\frac{1}{Uc} = \text{const.},$$

c étant le diamètre.

Cependant Reynolds, dans ce groupe d'expériences, n'a pas fait varier la longueur des tubes. Rien ne prouve, à la rigueur, que la constante ne dépende pas de l.

Dans d'autres expériences où il a fait varier la température, Reynolds a trouvé que l'expression

$$\frac{Uc}{P}$$

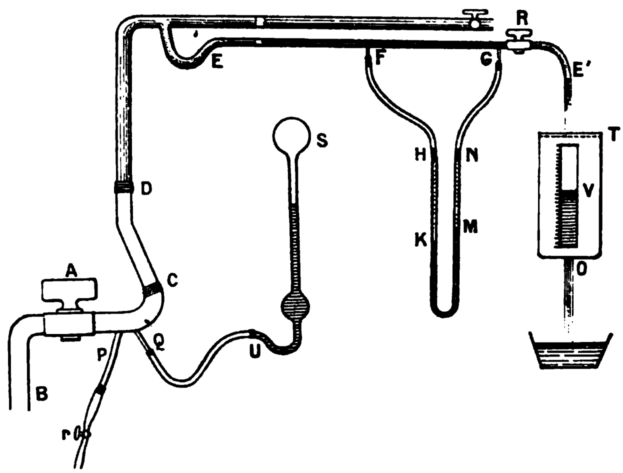
reste constante à $\frac{1}{20}$ près au moins $\left(\text{P représente le polynome de Poiseuille : } P = 1 + \alpha t + \beta t^2 = \frac{\mu}{\mu_0}\right)$.

178. Deuxième appareil. — Les expériences qui précédent ne suffisent pas à établir incontestablement la constance du produit Uc relative au débit limite; car l'observation du régime par l'apparence

du jet coloré n'est pas assez précise. Aussi M. Osborne Reynolds a-t-il repris l'étude de cette loi avec un autre appareil (*fig.* 59).

Un tube de plomb EE', où l'on étudie le débit, reçoit l'eau de la ville, par le tuyau BC muni d'un robinet A; la jonction est faite par le tuyau de caoutchouc CD. Entre le robinet A et ce tuyau de

Fig. 59.



caoutchouc se détachent du tuyau BC deux tuyaux plus petits : l'un, P, est terminé par un tube de caoutchouc partiellement fermé par une pince *r*, de manière à régulariser le débit dans le tube EE'; l'autre tuyau, Q, est lié par le caoutchouc QU à un manomètre US à air comprimé qui indique par la constance de son niveau si le débit reste constant.

Le tube EE' a environ 6^m de long; deux tubes plus étroits ont été soudés perpendiculairement sur lui, l'un G tout près de l'extrémité, l'autre F $1^m,50$ en arrière; ils sont reliés à l'aide de caoutchoucs aux deux branches H et N d'un long tube en U qui contient en KLM du mercure ou du sulfure de carbone, tout le reste étant plein d'eau. La différence des niveaux K, M permet de calculer la chute de pression de F à G si l'on connaît la densité du liquide en KLM. Le niveau K est pointé à l'aide d'un microscope, au $\frac{1}{10}$ de millimètre.

Enfin, le débit est évalué de la manière suivante : le liquide qui sort du tube EE' par le robinet R est reçu dans un vase V où le jet est brisé par une toile métallique T. Ce vase est percé au fond d'une ouverture O pratiquée en mince paroi par où le liquide s'écoule. Le

niveau auquel s'élève l'eau dans ce vase est d'autant plus haut que le débit dans le tube EE′ est plus grand; il se fixe bientôt à une hauteur déterminée qui reste invariable si le débit dans EE′ est constant; à ce moment, ce débit est égal à celui de l'orifice O, auquel la règle de Torricelli est applicable.

La différence mesurée des pressions en F et G permet de calculer (connaissant la longueur FG) la dérivée $\frac{\partial p}{\partial x}$ de la pression. Afin que les prises de pressions en F et G n'altèrent pas la nature du mouvement dans le tube EE′, les communications avec ce tube ont lieu pour chaque ajutage par un trou fin percé dans la paroi et autour duquel le tube plus étroit est soudé.

179. Avec cet appareil, Osborne Reynolds a cherché, en augmentant le débit progressivement, à déterminer exactement le moment où cesse le régime de Poiseuille et celui où l'autre régime est définitivement établi; en d'autres termes, il a cherché à fixer avec précision les limites de la période troublée.

Les expériences sur les jets colorés se prêtaient mal à des déterminations exactes, car les conditions étaient telles que le régime de Poiseuille se maintenait aussi longtemps que possible, même peut-être pour des valeurs du débit où ce régime est devenu instable.

Dans les nouvelles expériences, Reynolds évite systématiquement des perturbations à l'entrée du tube; de la sorte, le régime de Poiseuille doit cesser de subsister seul dès que l'autre est possible; de même le régime hydraulique s'établit définitivement dès que celui de Poiseuille est devenu instable.

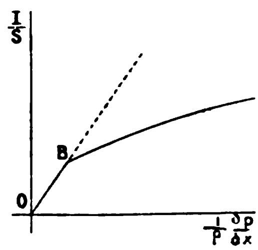
Reynolds a ainsi reconnu : 1° que le régime de Poiseuille cesse d'exister seul pour une certaine vitesse moyenne maxima U; 2° qu'après une période de trouble, le régime hydraulique est établi sans retour pour une vitesse moyenne minima égale à 1, 2.U environ.

180. Représentation graphique des résultats. — Reynolds construit une courbe pour chaque tube; il porte en abscisses les valeurs de $-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}$ et en ordonnées celles de la vitesse moyenne $\frac{I}{S}$, quotient du débit I par la section S.

Au début, quand le débit croît à partir de zéro, on obtient des points en ligne droite (Reynolds en a déterminé une vingtaine); pendant chaque mesure, le manomètre reste absolument fixe : c'est le régime de Poiseuille régulier et ininterrompu. Puis commence la

période de trouble; le manomètre tremble constamment, la pression moyenne restant d'ailleurs bien précise; on n'a plus affaire à un régime permanent proprement dit, il n'est permanent qu'en moyenne; les points correspondants se placent alors sur une courbe qui se sépare tout à fait de la droite initiale (*fig.* 60).

Fig. 60.



Le point B où cesse la loi de Poiseuille a toujours été trouvé très nettement, mais sa position dépend des perturbations à l'entrée.

Quand le régime hydraulique est bien constitué, les expériences sont bien représentées par une formule de la forme

$$(1) \qquad -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = K\left(\frac{1}{S}\right)^n.$$

C'est ce que montre un autre mode de représentation graphique où l'on adopte pour coordonnées

Abscisses...... $\text{Log}\left(-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\right)$

Ordonnées...... $\text{Log}\,\frac{1}{S}$.

On a en effet, d'après (1),

$$\text{Log}\left(-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\right) = n.\text{Log}\,\frac{1}{S} + \text{Log}.K,$$

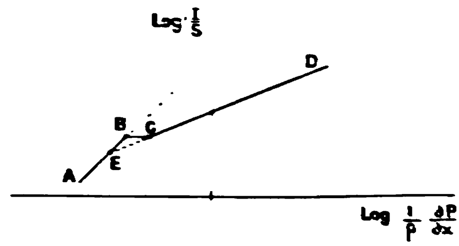
et la nouvelle courbe doit être une droite; la portion qui représentait le régime de Poiseuille devait encore représenter une droite. C'est ce que les graphiques ont montré.

Ici la période relative au régime de Poiseuille est représentée par un segment de droite AB, incliné à 45° sur les axes (*fig.* 61).

Le régime hydraulique est représenté par une autre droite CD qui part du point C; les deux extrémités B et C sont raccordées par un

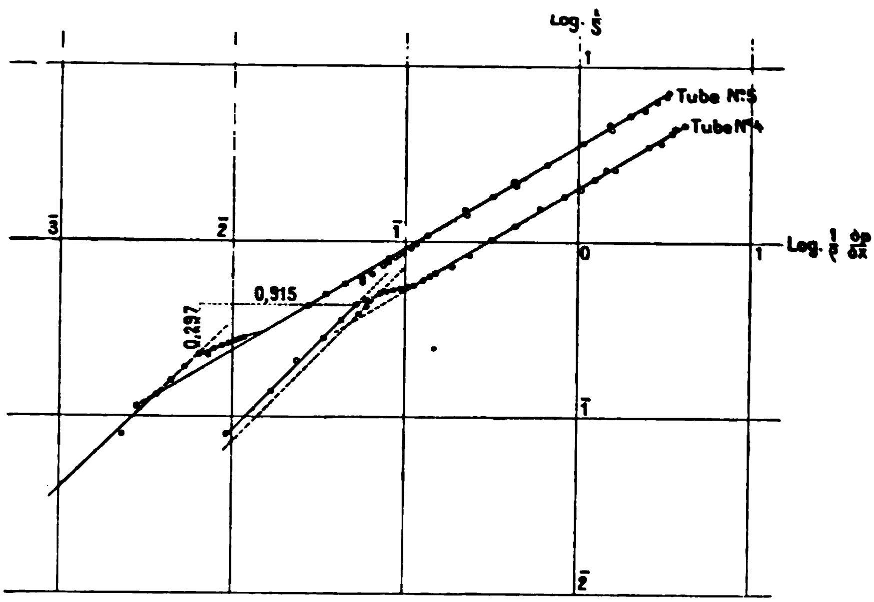
tronçon de courbe BC qui correspond à la période des battements. On voit que le point C où cesse le régime de Poiseuille est situé au delà du point E où les deux droites se rencontrent (*fig.* 61).

Fig. 61.



L'exposant n est indépendant du tube; car toutes les droites CD pour les tubes différents sont parallèles entre elles (*fig.* 63) et les

Fig. 62.



graphiques relatifs à deux tubes différents peuvent être amenés en coïncidence par une translation convenable.

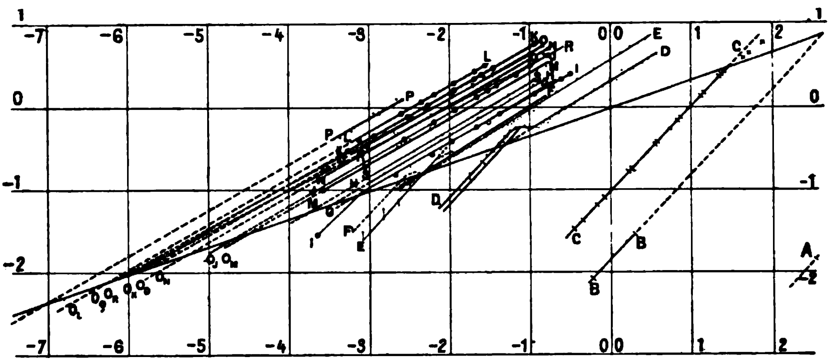
Reynolds a trouvé pour toutes ses expériences

$$n = 1,7222,$$

nombre voisin de 1,75 qui est celui de Hagen.

Si l'on examine la figure 61, on voit que de A en E le régime de Poiseuille seul peut exister. A partir du point E, le régime hydraulique peut apparaître, mais le régime de Poiseuille peut continuer

Fig. 63.



encore jusqu'au point B; ces deux points sont plus ou moins rapprochés suivant les perturbations introduites à l'entrée.

Le seul point bien déterminé est donc le point E d'intersection des deux droites.

Enfin, en ce qui concerne la position extrême du point B, Reynolds a trouvé que, si la vitesse moyenne U est inférieure à $1900 \frac{\mu}{\rho c}$, le régime de Poiseuille peut encore subsister; si cette limite est dépassée, le régime de Poiseuille disparaît forcément.

181. Expériences de Darcy. — Bien avant Reynolds, en 1857, Darcy (¹) avait étudié le régime hydraulique dans des tubes métalliques. Il a utilisé des diamètres allant jusqu'à 50^{cm} et des vitesses moyennes allant jusqu'à 7^{m} par seconde.

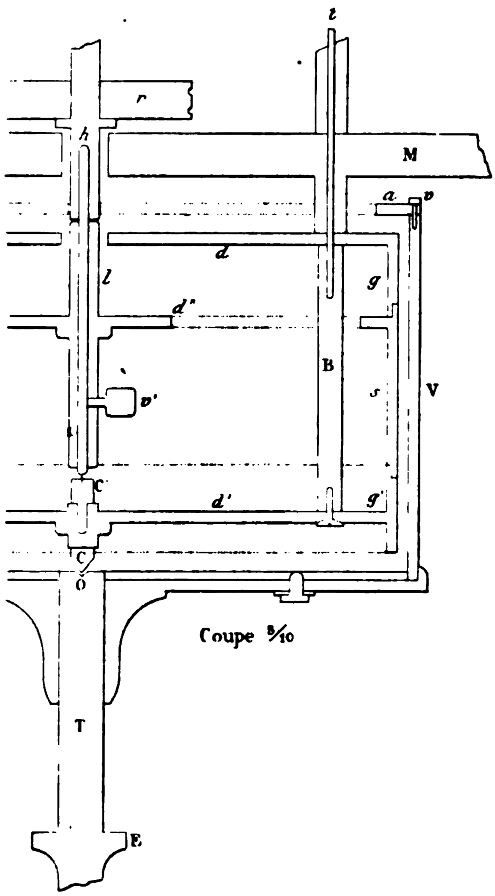
Il avait trouvé la résistance hydraulique proportionnelle à U^n, où n a la valeur 1,92 plus grande que celle de Reynolds (1,72).

Le nombre 1,72 correspond en général aux tubes dont la paroi interne est parfaitement lisse (tubes de plomb neuf, tubes de verre, etc.); mais, si le tube présente des aspérités ou des joints de distance en distance, des irrégularités se produisent à chaque instant dans le mouvement, et l'on trouve, pour n, le nombre 1,92 très voisin de 2.

(¹) *Mémoires des savants étrangers*, t. XV.

182. Expériences de M. Couette ([1]). — *Rotation entre deux cylindres.* — Les premières et les plus importantes expériences de M. Couette ont été faites au moyen d'un appareil tournant formé de deux cylindres concentriques de diamètres très peu différents (*fig.* 64). L'un, extérieur, V, tourne autour de son axe, qui est verti-

Fig. 64.



cal; il est mû par une machine Gramme; ses tours s'inscrivent électriquement sur un cylindre enregistreur. Le second, un peu plus petit, s, de hauteur h, est suspendu à un fil d'acier; sa surface est

([1]) *Thèse* et *Journal de Physique*, 1890, t. IX, 2e série, p. 414.

prolongée par des anneaux de garde g, g'. Le pivot c' et un petit tube fixe, à travers lequel passe la partie inférieure du fil d'acier, empêchent les ballottements du cylindre s tout en lui laissant une grande mobilité autour de son axe; il y a en effet une assez grande difficulté à régler et conserver le centrage; cette position, que l'on reconnaît à ce qu'elle donne la plus petite valeur du coefficient μ, est en effet peu stable.

Le liquide remplit l'espace annulaire et l'intérieur du cylindre s dont les joints avec les anneaux de garde ne peuvent être étanches; mais le liquide intérieur au cylindre s reste immobile et ne joue aucun rôle. C'est dans l'espace annulaire que le liquide est entraîné par la rotation du vase V. Pour mesurer le frottement exercé sur le cylindre s, on l'équilibre par la torsion du fil ou par des poids, qui agissent au moyen de cordons et de poulies de renvoi sur la poulie horizontale de rayon r liée à ce cylindre.

Des expériences préalables permettent de traduire en poids les mesures faites en angles de torsion.

Les dimensions principales de l'appareil sont

$$R_1 = 14^{cm},6305, \qquad r = 3^{cm},8412,$$
$$R_2 = 14^{cm},3930, \qquad h = 7^{cm},9053.$$

La théorie (n° 73) donne pour le couple C

$$C = 4\pi\mu\omega h \frac{R_1^2 R_0^2}{R_1^2 - R_0^2}.$$

Le rapport $\frac{C}{\omega}$ doit être constant dans le régime lent; il change rapidement lorsque le régime lent cède la place au régime hydraulique. Le premier régime dure jusqu'à 55 tours par minute; au delà, $\frac{C}{\omega}$ croît très vite d'abord, puis à peu près proportionnellement à ω ensuite. La ligne I (*fig.* 65) représente l'ensemble des expériences; la ligne II reproduit à une échelle quintuple la région où se manifeste la discontinuité. Les 19 expériences du premier groupe sont sur la droite

$$\frac{C}{\omega} = \frac{30rg}{\pi} 0,2151.$$

La dernière (27), avec la première du groupe suivant (R), marque clairement l'abscisse de la discontinuité. Dans cette région, l'aiguille liée au cylindre s éprouve fréquemment des sauts brusques qui la

font sortir de l'arc divisé; le couple varie parfois de $\frac{1}{10}$ à un $\frac{1}{5}$ de sa valeur! Quand l'aiguille reste fixe pendant 1 ou 2 minutes, on note le résultat; les points ainsi obtenus sont disposés assez irrégulièrement, ils correspondent à un régime hydraulique peu stable. Mais la stabilité reparaît complètement aux vitesses supérieures à 127 tours. Au delà de cette limite et jusqu'à 450 tours, on a

$$\frac{C}{\omega} = \frac{30 r g}{\pi}\left(0,03260 + 0,0038832\,\frac{30\,\omega}{\pi}\right).$$

Avec l'huile au lieu d'eau, on n'a pu atteindre le régime hydraulique.

Pour l'air, étudié avec le fil de torsion seul, c'est seulement à 750 tours que s'est manifestée la discontinuité, et l'on a bien

$$\frac{750}{56} = \frac{\left(\frac{\mu}{\rho}\right)\text{air}}{\left(\frac{\mu}{\rho}\right)\text{eau}} = \frac{0,00018 : 0,0012}{0,0109},$$

comme l'exige la règle de Reynolds.

De même que sur la veine liquide, le changement de régime se reconnaît facilement au seul aspect de la surface libre dans l'espace annulaire; parfaitement calme et lisse dans les mouvements lents; calme et ridée dans les mouvements très rapides, cette surface est parcourue par des ondes subites et irrégulières pour les vitesses intermédiaires.

Les valeurs absolues des coefficients de viscosité de l'eau et de l'air tirées de ces expériences sont d'ailleurs d'accord avec celles que donne l'écoulement par les tubes capillaires.

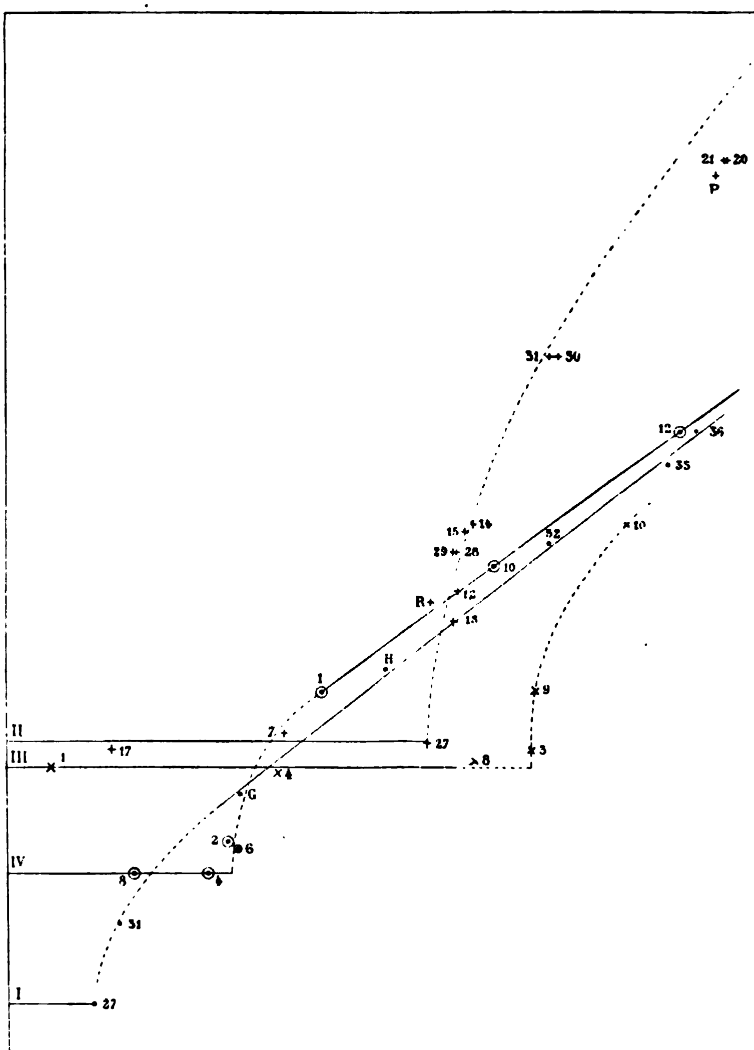
183. Expériences de M. Couette sur les tubes. — Ces résultats ont été confirmés par les expériences de M. Couette dont nous avons parlé plus haut (n° 120). Les expériences sur les tubes sont représentées par les courbes III, IV de la figure 65. La viscosité calculée reste nettement constante, jusqu'au débit de $2^{\text{mm}^3},27$ pour les tubes de $0^{\text{mm}},5$ et $3^{\text{mm}^3},63$ pour les tubes de $0^{\text{mm}},9$; au delà, la viscosité calculée croît subitement; le régime de Poiseuille est devenu instable et ne tarde pas à céder la place au régime hydraulique, représenté par la droite inclinée.

M. Couette a aussi étudié directement le changement de régime

par l'aspect de la veine liquide, à la sortie de tubes de différents diamètres et de différentes longueurs :

1° La longueur du tube est sans influence sur la production du régime hydraulique.

Fig. 65.



2° Le débit limite est proportionnel au diamètre du tube. C'est la loi de Reynolds : car la *vitesse moyenne* limite est *inversement* proportionnelle au diamètre

$$U = k\frac{\mu}{\rho}\,\frac{1}{c}.$$

Voici quelques nombres :

Premier tube. — Rayon $0^{cm},18$.

Longueurs...........	86,5.	71,5.	57,9.	41,8.	25,7.
Débits limites, I par minute....	388	360 372	361 365	360 392	394

Les débits limites sont bien indépendants des longueurs. Voici maintenant pour la loi des diamètres :

Rayons R.........	0,05.	0,09.	0,13.	0,18.	0,21.	0,27.
$\frac{60\,I}{R}$ (à 13°)......	2073	2378	2632	2121	2570	2538

I est bien proportionnel à R.

184. Conclusion. — L'écoulement d'un liquide à travers un tube peut donc s'effectuer sous deux régimes différents.

Lorsque le mouvement est assez lent et assez uniformément distribué dans l'espace pour que les termes d'accélération qui proviennent de la variation de section des tubes de flux et surtout des rotations élémentaires soient négligeables, le régime simple, défini par les équations d'Euler réduites aux termes linéaires, se produit spontanément et est stable.

Lorsque la rapidité du mouvement ne permet pas de négliger les termes d'accélération dus à la variation de section des tubes de flux et surtout aux rotations élémentaires, l'expérience montre que le mouvement précédent, même s'il est encore possible, cesse d'être stable; des ondulations prennent naissance, et l'on passe au régime hydraulique. Des considérations d'homogénéité ont conduit Osb. Reynolds à penser que le changement de régime s'effectue lorsque le nombre

$$\frac{\rho c U}{\mu}$$

dépasse une certaine valeur, que des aperçus théoriques ont fixée à environ 500, et qui, d'après l'expérience, paraît voisin de 2000 (C. G. S.). La forme particulière de ce critérium de stabilité a été confirmée par les expériences de Reynolds, celles de Couette, et est d'accord avec les expériences antérieures de Hagen.

Dans cette formule

ρ est la densité du fluide;
μ est la viscosité du fluide;
c la plus petite dimension transversale au courant de paroi à paroi;
U la vitesse moyenne dans la section correspondante.

Quant à la théorie elle est à peine ébauchée.

Dans tout ce Chapitre, j'ai appelé *ondulations* et *mouvements ondulatoires,* ce qu'on décrit ordinairement comme tourbillons ou mouvements tourbillonnaires dans le régime hydraulique; voici pourquoi : au sens hydrodynamique du mot, le mouvement dans le régime de Poiseuille est essentiellement tourbillonnaire; il n'y a pas de potentiel des vitesses; la rotation élémentaire, perpendiculaire au plan méridien, est nulle sur l'axe et croît régulièrement vers les parois; la distribution en est permanente. Mais cette distribution permanente et régulière ne représente pas ce que, dans le langage courant, on appelle des *tourbillons :* ce que les hydrauliciens nomment ainsi, c'est le mouvement giratoire rapide, *à potentiel des vitesses,* ou à peu près, qui entoure une cavité en entonnoir ou un véritable tourbillon central. Dans les larges canaux à parois rugueuses, ces mouvements giratoires prennent naissance aux parois, grandissent, se détachent et sont entraînés dans le courant général où ils s'éteignent, tandis que d'autres se reforment derrière eux. C'est vraisemblablement le régime mixte, dont le domaine serait d'autant plus étendu que la paroi est plus rugueuse, surtout lorsque les herbes et les roseaux qui la tapissent en font une paroi flexible. Dans les tubes de verre ou de métal à parois lisses et rigides, le second régime est de nouveau régulier et caractérisé par la forme striée à ondulations fixes de la veine liquide émergente. Les rotations élémentaires sont concentrées dans une couche plus voisine de la paroi que dans le régime de Poiseuille; en outre, leur distribution longitudinale, au lieu d'être uniforme, est devenue périodique, à longueur d'onde assez courte, dont les nœuds et les ventres sont fixes. En l'absence de théorie, il y aurait intérêt à étudier expérimentalement la loi de la longueur d'onde en fonction du débit, la distribution des vitessss suivant le rayon, et à en déterminer la stabilité, ainsi qu'à reconnaître les lois, certainement précises, d'alternance du régime de Poiseuille et du second régime et le mode de propagation d'un régime dans l'autre, soit longitudinal, soit transversal.

TABLE DES MATIÈRES.

LIVRE I. — Généralités.

CHAPITRE I.

CHAPITRE II.

CHAPITRE III.

CHAPITRE IV.

CHAPITRE V.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DE LA PREMIÈRE PARTIE.

37262 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.